Limites, asymptotes et positions relatives

Ayoub Hajlaoui

En l'un des infinis, par équations adroites,
Vois qu'à pas de fourmi, ta Courbe rejoint Droite.

Enoncé :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \sqrt{4x^2+1} - 2x$$

On appelle C_f sa courbe représentative dans un repère.

1) Déterminer la limite de f en $+\infty$. En déduire l'existence d'une asymptote à C_f.

2) Déterminer la limite de f en $-\infty$. Démontrer que la droite d d'équation $y = -4x$ est asymptote à C_f en $-\infty$.

3) Étudier les positions relatives de d et C_f.

Correction :

1) *Toujours essayer (au moins mentalement) un calcul de limite simple, avant de sortir l'artillerie lourde réservée aux formes indéterminées. Bon, ici, en l'occurrence, on voit* $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{4x^2+1} = +\infty$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty} -2x = -\infty$. *En sommant, on obtient donc une forme indéterminée, pas de chance (cette fois-ci...).*

Que faire ? Une forme indéterminée avec une racine carrée doit faire penser à la technique des quantités conjuguées, qui se base tout simplement sur $a+b = \dfrac{a^2-b^2}{a-b}$ *ou inversement* $a-b = \dfrac{a^2-b^2}{a+b}$ *(identité remarquable, en s'assurant que ce qu'on met au dénominateur est non nul).*

$$\begin{aligned}\forall x > 0,\ f(x) &= \sqrt{4x^2+1} - 2x = \frac{(\sqrt{4x^2+1})^2 - (2x)^2}{\sqrt{4x^2+1}+2x} = \frac{4x^2+1-4x^2}{\sqrt{4x^2+1}+2x} \\ &= \frac{1}{\sqrt{4x^2+1}+2x}\end{aligned}$$

L'intérêt d'une telle démarche ? Le signe $-$ dans l'expression originelle de f était à l'origine de la forme indéterminée. Comble du bonheur pour nous, ce signe $-$ a laissé place à un signe $+$ (au dénominateur), ce qui lève l'indétermination. Dès lors :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{4x^2+1}+2x}$$

Donc (par opérations sur les limites) $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0}$

Rappelons que la courbe représentative d'une fonction ayant une limite l finie quand x tend vers $+\infty$ ou $-\infty$ admet pour asymptote la droite $y = l$ (asymptote horizontale).

Donc, $\boxed{\text{en } +\infty,\ C_f \text{ a pour asymptote horizontale la droite d'équation } y = 0}$ (la droite des abscisses).

2) *C'est là que mon conseil vous incitant à toujours, dans un premier temps, essayer un calcul de limite simple se révèle salvateur : en effet, certains se lanceraient dans des calculs sans fin ici (quantité conjuguée etc...) alors qu'en fait, tout se passe très bien, sans forme indéterminée.*

$\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{4x^2+1} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} -2x = +\infty$, donc $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty}$

Pour montrer que la droite d d'équation $y = -4x$ est asymptote à C_f en $-\infty$, il faut montrer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) - (-4x) = 0$

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad f(x) - (-4x) = f(x) + 4x = \sqrt{4x^2+1} + 2x$$

Ici, en l'occurrence, en essayant un calcul de limite simple en $-\infty$, on tombe sur une forme indéterminée. On peut lever l'indétermination en utilisant les quantités conjuguées, comme en 1), mais dans l'autre sens. Si vous ne voyez rien d'autre, faites ça, et normalement, vous aurez les points.

Mais personnellement, j'ai la flemme de réécrire tout ça. Alors j'ai une autre idée...

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) - (-4x) \quad = \quad \lim_{x\to-\infty} \sqrt{4x^2+1} + 2x = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{4(-x)^2+1} + 2(-x)$$

" x tend vers $-\infty$ " $\Leftrightarrow$ " $y = -x$ tend vers $+\infty$ " (changement de variable)

$$\text{Donc } \lim_{x\to-\infty} f(x) - (-4x) \quad = \quad \lim_{y\to+\infty} \sqrt{4y^2+1} - 2y$$

Dans cette dernière expression, le nom de la variable a peu d'importance, ce n'est qu'une variable " muette "...

Mais cette limite, je l'ai déjà calculée, non ?

$$\text{Donc (cf 1)} \lim_{x\to-\infty} f(x) - (-4x) \quad = \quad 0$$

$\boxed{\text{La droite } d \text{ d'équation } y = -4x \text{ est donc asymptote à } C_f \text{ en } -\infty}$.

3) *Pour étudier les positions relatives de d et C_f, il faut savoir sur quels intervalles $f(x) \geq -4x$ et inversement.*

Résolvons sur $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) \geq -4x$:

$$f(x) \geq -4x \Leftrightarrow \sqrt{4x^2+1} \geq -2x$$

J'ai très envie d'élever au carré, mais je risque de perdre mon équivalence si jamais ce que j'élève au carré n'est pas forcément positif... $a \geq b \Rightarrow a^2 \geq b^2$, mais la réciproque n'est pas vraie. Par contre, dans le cas où a et b sont positifs, il y a bien équivalence. Dans l'inégalité que j'ai, le membre de gauche est toujours positif (racine carrée), mais pas forcément le membre de droite. D'où l'idée de distinguer deux cas :

Si $x > 0$, $\sqrt{4x^2+1} > 0 > -2x$ (donc C_f est au-dessus de d).

Si $x \leq 0$, $\sqrt{4x^2+1} \geq -2x \Leftrightarrow 4x^2+1 \geq 4x^2 \Leftrightarrow 1 \geq 0$ Cette dernière inégalité étant toujours vraie, C_f est, dans ce cas aussi, au-dessus de d.

$\boxed{\text{Donc } C_f \text{ est toujours au-dessus de } d.}$