Deux suites définies par récurrence croisée

Ayoub Hajlaoui

" Croiser les récurrences ? Quelle est cette folie ? "
Dirait en l'occurrence un cerveau ramolli.

Enoncé :

On considère les deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :

$$a_0 = 1,\ b_0 = 2 \ \text{ et } \ \forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \text{ et } b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$$

1) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N},\ 1 \leq a_n \leq b_n \leq 2$
2) Démontrer que la suite (a_n) est croissante.
3) Démontrer que la suite (b_n) est décroissante.
4) En déduire que (a_n) et (b_n) sont convergentes.
5) Montrer qu'elles convergent vers une même limite l.

Considérations tactiques :

Cet exercice est relativement difficile, mais sa difficulté n'est pas uniformément répartie. La question 1 peut s'avérer bloquante, mais il faut se rendre compte que toutes les autres questions peuvent être faites même si on n'a pas traité la 1.
De même, à supposer qu'en catastrophe, on ne trouve pas le temps de traiter les 2 et 3, on peut toujours faire les 4 et 5 (en supposant admis les résultats des questions précédentes).
Il y a toujours des points donnés à prendre, à moins de ne pas savoir accepter les cadeaux.

Correction :

1) *Derrière cette sucession d'inégalités aux airs compliqués se cachent tout simplement trois inégalités élémentaires, à démontrer pour tout entier n : $1 \leq a_n$, $a_n \leq b_n$, et $b_n \leq 2$. N'ayant pas d'idée particulière à première vue, et encouragé par la formulation de l'énoncé (suites définies par une récurrence un peu tordue), je me lance dans une démonstration par récurrence. Intuitivement, deux voies principales semblent se disputer : ou bien faire un raisonnement par récurrence pour chaque inégalité, ou bien considérer la propriété correspondant aux trois inégalités à la fois, et démontrer cette propriété par récurrence. La seconde voie est bien plus judicieuse ici, en ce sens qu'elle nous donne une hypothèse de récurrence plus riche à utiliser dans l'étape d'hérédité. Quoiqu'il en soit, si vous essayez la première voie, vous verrez bien que vous vous trouverez bloqués à cette étape d'hérédité, par manque d'hypothèses.*
Constatons tout d'abord que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \geq 0$ et $b_n \geq 0$ *(récurrence immédiate, c'est d'ailleurs ce qui permet d'assurer l'existence des b_n)*

Démontrons par récurrence sur n la propriété P_n : " $1 \leq a_n \leq b_n \leq 2$ " pour tout entier n.

Initialisation : $a_0 = 1$, $b_0 = 2$, et on a bien $1 \leq 1 \leq 2 \leq 2$. P_0 est donc vraie.
Hérédité : Supposons P_n vraie pour un certain rang n. Autrement dit, supposons $1 \leq a_n \leq b_n \leq 2$, et montrons P_{n+1} : " $1 \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq 2$ "
- Montrons $1 \leq a_{n+1}$:
$a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} = \sqrt{a_n}\sqrt{b_n} \geq \sqrt{a_n}\sqrt{a_n}$ (car $0 \leq a_n \leq b_n$ et la fonction racine est croissante sur $\mathbb{R}_+$). On a donc $a_{n+1} \geq a_n$. De plus, par hypothèse de récurrence, $a_n \geq 1$. Donc $a_{n+1} \geq 1$.
- Montrons $b_{n+1} \leq 2$:
$b_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2} \leq \dfrac{b_n + b_n}{2} = b_n \leq 2$ (la dernière inégalité venant de l'hypothèse de récurrence). Donc $b_{n+1} \leq 2$.
- Montrons $a_{n+1} \leq b_{n+1}$:
On sait $b_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2}$ et $a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$
Comment montrer qu'un terme est plus petit qu'un autre ? Il peut être bon d'étudier la différence...

$$b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} - \sqrt{a_n b_n} = \frac{a_n + b_n - 2\sqrt{a_n b_n}}{2}$$

Vous ne voyez rien ? Allez, regardez encore... Bon, ok, je vous aide, mais un tout petit peu : $... = \dfrac{a_n - 2\sqrt{a_n}\sqrt{b_n} + b_n}{2}$

On a donc (cf identité remarquable) $b_{n+1} - a_{n+1} = \dfrac{(\sqrt{a_n} - \sqrt{b_n})^2}{2} \geq 0$
Donc $a_{n+1} \leq b_{n+1}$
On a donc bien montré $1 \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq 2$ (c'est-à-dire P_{n+1})
Conclusion : Le principe de raisonnement par récurrence nous permet de conclure : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, 1 \leq a_n \leq b_n \leq 2}$

Remarque : on aurait pu prouver : $\forall n \in \mathbb{N}, a_n \leq b_n$ sans récurrence. Remarquez en effet que dans la partie de l'hérédité où j'ai prouvé $a_{n+1} \leq b_{n+1}$, je ne me suis pas servi de l'hypothèse de récurrence... En variante, on aurait donc pu prouver $a_{n+1} \leq b_{n+1}$ pour tout n entier (en calcul direct sans récurrence), sans oublier que cela veut dire $a_n \leq b_n$ pour tout $n \geq 1$ (ne pas oublier, donc, de vérifier $a_0 \leq b_0$). Ensuite, on aurait fait une récurrence pour démontrer, pour tout n, P'_n : " $1 \leq a_n$ et $b_n \leq 2$ ".

2) *Les plus observateurs pourront remarquer que dans notre récurrence, nous avons été amenés à écrire " $a_{n+1} \geq a_n$ " et " $b_{n+1} \leq b_n$ "... Mais les plus observateurs ne doivent pas devenir les plus imprudents, en s'imaginant que la croissance de (a_n) et la décroissance de (b_n) auraient donc été prouvées, alors qu'il ne s'agissait que de ce qu'impliquait notre hypothèse de récurrence. En des mots plus simples : la croissance de (a_n) et la décroissance de (b_n) restent bien à démontrer. Même si nous devons quasiment reprendre (presque tel quel) notre développement de la partie " hérédité ".*

$\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = \sqrt{a_n}\sqrt{b_n} \geq \sqrt{a_n}\sqrt{a_n}$ car nous savons $a_n \leq b_n$ *(non plus par hypothèse de récurrence, mais parce que cela a été démontré pour tout entier n dans la question précédente)*
Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} \geq a_n$. $\boxed{\text{La suite } (a_n) \text{ est donc croissante.}}$

3) $\forall n \in \mathbb{N}$, $b_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2} \leq \dfrac{b_n + b_n}{2}$ (car $a_n \leq b_n$ d'après la question 1)
Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $b_{n+1} \leq b_n$. $\boxed{\text{La suite } (b_n) \text{ est donc décroissante.}}$

4) *En déduire... En déduire... L'exercice serait vraiment tordu si cela ne constituait pas un clin d'oeil, une passe téléphonée vers " toute suite croissante majorée converge " et " toute suite décroissante minorée converge "... Nous savons* (a_n) *croissante et* (b_n) *décroissante, donc la moitié des hypothèses nécessaires pour utiliser ces théorèmes. Que savons-nous d'autre ?*

$\forall n \in \mathbb{N}, a_n \leq b_n \leq b_0$. *Et oui, n'oublions pas que* (b_n) *est décroissante...*
Donc (a_n) est majorée par b_0 (c'est-à-dire 2).
De plus, (a_n) est croissante (cf question 2).
Donc $\boxed{(a_n) \text{ converge}}$.

De même : $\forall n \in \mathbb{N}, b_n \geq a_n \geq a_0$ (car (a_n) est croissante)
Donc (b_n) est minorée par a_0 (c'est-à-dire 1).
De plus, (b_n) est décroissante (cf question 3).
Donc $\boxed{(b_n) \text{ converge}}$.

5) *Comme je sais que ces deux suites convergent, je peux donner des noms à leurs limites respectives...*
Soient l_1 la limite de (a_n) et l_2 la limite de (b_n).
$\forall n \in \mathbb{N}, \quad b_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2}$
Par passage à la limite (en faisant tendre n vers $+\infty$ dans chacun des membres de cette inégalité), on obtient : $l_2 = \dfrac{l_1 + l_2}{2}$
On a donc $2l_2 = l_1 + l_2$, ou encore $l_2 = l_1$.
Donc $\boxed{(a_n) \text{ et } (b_n) \text{ convergent vers une même limite } l}$.

Pourquoi avoir utilisé l'égalité avec b_{n+1} *et non celle avec* a_{n+1} *? C'est à moi de vous demander ce qui suit : pourquoi voudriez-vous que je m'inflige une racine carrée si je peux l'éviter ?*