Existence d'un point fixe

Ayoub Hajlaoui

Il reste bien assis au sein des points errants
Car cette fonction-ci le laisse indifférent.

Enoncé :

Soient $a < b$ dans $\mathbb{R}$ et f une application continue de $[a; b]$ dans $[a; b]$. Montrer qu'il existe au moins un $c \in [a; b]$ tel que $f(c) = c$.

Correction :

Ce genre d'exercice sournois qui ne fait pas deux lignes, mais dont on sent qu'il va nous faire transpirer...

A quelle branche s'accrocher ? Essayons désespérément de rattacher cet exercice à un quelconque point du cours. Ceux qui connaissent bien le leur n'hésiteront pas un instant : l'énoncé fait penser au Théorème des Valeurs Intermédiaires ou TVI (attention, pas à son corollaire, appelé aussi théorème de la bijection qui, lui, requiert l'hypothèse supplémentaire de la stricte monotonie, et ajoute l'unicité à l'existence).

Sauf que la conclusion du TVI est du style " il existe $c \in [a; b]$ *tel que* $f(c) = A$ *" où* A *est une valeur fixée, et qu'ici on a* $f(c) = c$*...*

Montrons qu'il existe au moins un $c \in [a; b]$ tel que $f(c) - c = 0$. (*)

Je sais, ça revient au même. L'intérêt de changer la formulation ? C'est que ça ressemble plus à la conclusion du TVI, maintenant... Par contre, j'aurai besoin d'introduire une nouvelle fonction, vous n'êtes pas d'accord ?

Soit g la fonction définie sur $[a; b]$ par $g(x) = f(x) - x$.

Le décor est posé. Tentons donc de dérouler les hypothèses du TVI, pour ensuite aboutir à sa conclusion...

<u>g est continue sur $[a; b]$</u> (car somme de deux fonctions continues).

Que nous faut-il de plus ? L'image pour laquelle nous voulons démontrer l'existence d'un antécédent est 0 *(voir (*)). Il nous faut donc montrer que* 0 *est compris entre* $g(a)$ *et* $g(b)$ *(pas forcément dans cet ordre).*

$g(a) = f(a) - a$. Or $f(a) \in [a; b]$ (car d'après l'énoncé, f est une application de $[a; b]$ dans $[a; b]$, c'est-à-dire que les images sont dans $[a; b]$).
Dire $f(a) \in [a; b]$ revient à dire $a \leq f(a) \leq b$. Donc $f(a) \geq a$.
Autrement dit, $f(a) - a \geq 0$. Donc $g(a) \geq 0$.

De même, $g(b) = f(b) - b$ avec $f(b) \leq b$ (car $f(b) \in [a; b]$). Donc $g(b) \leq 0$.

On a donc montré $g(b) \leq 0 \leq g(a)$. Autrement dit, <u>$0 \in [g(b); g(a)]$</u>.

Les hypothèses soulignées en bleu nous permettent d'appliquer le TVI.

Donc d'après le Théorème des Valeurs Intermédiaires, il existe $c \in [a; b]$ tel que $g(c) = 0$.
Autrement dit, il existe $c \in [a; b]$ tel que $f(c) - c = 0$.

Donc : $\boxed{\text{il existe } c \in [a; b] \text{ tel que } f(c) = c}$.

Op op op, tu crois t'en tirer comme ça ? On nous a demandé de montrer qu'il existe au moins un c tel que ..., mais il n'y a pas de " au moins " dans ta conclusion !
- En mathématiques, dire " il existe..." revient exactement à dire " il existe au moins...". Par contre, " il existe un unique... " indique qu'il en existe un seul. C'est toute la différence entre la conclusion du TVI et celle de son corollaire (corollaire encore appelé dans vos cours théorème de la bijection).

www.ayoub-et-les-maths.com
ayoub.hajlaoui.scolaire@gmail.com