# Exponentielle et primitive

Ayoub Hajlaoui

*D'une écriture hâtive, il va dans l'autre sens*
*Pour une primitive, dont il cherche l'essence.*

**Enoncé :**

On considère la fonction $h$ définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par : $h(x) = x\mathrm{e}^{-x}$.

1) Déterminer la limite de la fonction $h$ en $+\infty$.

2) Étudier les variations de $h$ sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ et dresser son tableau de variations.

3) L'objectif de cette question est de déterminer une primitive de la fonction $h$.

a) Vérifier que pour tout nombre réel $x$ appartenant à l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$, on a :
$h(x) = \mathrm{e}^{-x} - h'(x)$ où $h'$ désigne la fonction dérivée de $h$.

b) Déterminer une primitive sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ de la fonction $x \longmapsto \mathrm{e}^{-x}$.

c) Déduire des deux questions précédentes une primitive de la fonction $h$ sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.

**Considérations tactiques :**

*Pas grand-chose à signaler, si ce n'est qu'il ne faut surtout pas faire la bêtise classique de celui qui ne lirait pas l'énoncé en entier : à la lecture de la question 3 ( " l'objectif de cette question...", certains élèves attaquent directement la recherche d'une primitive, avant même de lire le a) et le b), en répondant à une question qui ne leur est pas posée. Le début de la 3 n'est qu'une annonce. C'est en 3)b) que cette annonce se concrétise...*

*Cela est évident pour la plupart des élèves, mais si je peux éviter à deux ou trois étourdis de faire une telle bêtise en contrôle, c'est déjà pas mal.*

**Correction :**

1) *Comme toujours, on regarde d'abord si ça ne se résout pas par un calcul de limite simple. Ici en l'occurrence,non, vu que lorsque x tend vers* $+\infty$, $h(x)$ *est le produit d'un terme qui tend vers* $+\infty$ *et d'un autre qui tend vers* $0$. *Ensuite, cette forme doit nous faire penser à une formule de croissance comparée... Mais il faut faire un petit arrangement pour que cette forme corresponde exactement à une formule du cours.*

Posons $X = -x$. On a alors $\lim\limits_{x\to+\infty} X = -\infty$, et $h(x) = -Xe^X$.

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = \lim\limits_{X\to-\infty} -Xe^X$.

Or, d'après une formule de croissance comparée, $\lim\limits_{X\to-\infty} Xe^X = 0$

Donc $\lim\limits_{X\to-\infty} -Xe^X = 0$. Autrement dit, $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = 0}$

2) *L'énoncé définit h sur* $[0;+\infty[$ *donc je le suis, même si je vois qu'on pourrait sans difficulté définir cette fonction sur* $\mathbb{R}$.

$h$ est dérivable sur $[0;+\infty[$ (par composition et produit de fonctions dérivables sur $[0;+\infty[$).

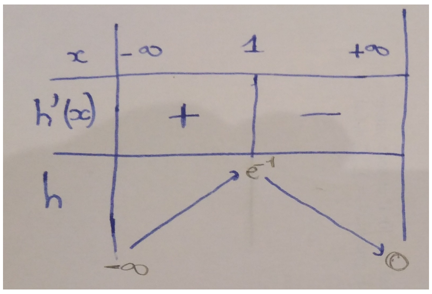
*On utilise la formule de la dérivée d'un produit de fonctions, en sachant que* $x \longmapsto e^{-x}$ *se dérive en* $x \longmapsto -e^{-x}$ *(car* $x \longmapsto e^{u(x)}$ *se dérive en* $x \longmapsto u'(x) \times e^{u(x)}$*, ou plus généralement car* $x \longmapsto f(g(x))$ *se dérive en* $x \longmapsto g'(x) \times f'(g(x))$*)*

www.ayoub-et-les-maths.com
ayoub.hajlaoui.scolaire@gmail.com

$\forall x \in [0;+\infty[, \quad h'(x) = e^{-x} - xe^{-x} = e^{-x}(1-x)$

$e^{-x} > 0$ donc $h'(x)$ est du même signe que $1-x$. Donc $h'(x) \geq 0 \Leftrightarrow 1-x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 1$

On peut ainsi dresser le tableau de signe de $h'(x)$ et donc le tableau de variations de $h$ :
*pour le tableau de signe, j'ai oublié de tracer 0 à cheval entre + et -, la flemme de reprendre une photo...*




On a calculé la limite en $+\infty$ en 1).

Pour la limite en $-\infty$ : $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty$. Donc, par opérations sur les limites : $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x) = -\infty$

Enfin, $h(1) = 1 \times e^{-1} = e^{-1} = \dfrac{1}{e}$

3)a) *J'ai une égalité à montrer. Je peux le faire dans le sens que je juge le plus simple...*

$\forall x \in [0;+\infty[, \ e^{-x} - h'(x) = e^{-x} - e^{-x}(1-x)$ *($h'$ ayant été déterminée en 1)...)*

Donc $e^{-x} - h'(x) = e^{-x}(1-1+x)$ *(attention aux signes en factorisant)*

Donc $e^{-x} - h'(x) = e^{-x} \times x = xe^{-x}$

Donc $\boxed{e^{-x} - h'(x) = h(x)}$

b) *Pour trouver une primitive de $x \longmapsto e^{-x}$, soit on connaît son cours et on la sort directement, soit on sent que ça va être du $x \longmapsto e^{-x}$ à une constante près...*

Sur $[0;+\infty[$, la dérivée de $x \longmapsto e^{-x}$ est $x \longmapsto -e^{-x}$

Donc la dérivée de $x \longmapsto -e^{-x}$ est $x \longmapsto e^{-x}$

Autrement dit, $\boxed{\text{une primitive de } x \longmapsto e^{-x} \text{ sur } [0;+\infty[ \text{ est la fonction } x \longmapsto -e^{-x}.}$

c) D'après l'égalité obtenue en 3)a), chercher une primitive de $h$ (sur $[0;+\infty[$) revient à chercher une primitive de $x \longmapsto e^{-x} - h'(x)$.

Or, d'après 3)b), une primitive de $x \longmapsto e^{-x}$ est la fonction $x \longmapsto -e^{-x}$.

De plus, une primitive de $x \longmapsto -h'(x)$ est évidemment $x \longmapsto -h(x)$. (car la première est la dérivée de la seconde)

Une primitive de $h$ sur $[0;+\infty[$ est donc la fonction $x \longmapsto -e^{-x} - h(x) = -e^{-x} - xe^{-x}$

Autrement dit, $\boxed{\text{une primitive de } h \text{ sur } [0;+\infty[ \text{ est la fonction } x \longmapsto -e^{-x}(1+x)}$

*Attention ! j'ai tout à fait le droit de dire que si $F$ est une primitive de $f$ et $G$ est une primitive de $g$, alors $F+G$ est une primitive de $f+g$ (et ce car dans ce cas, $(F+G)' = F'+G' = f+g$). C'est ce que j'ai utilisé ici.*

*Mais hors de question de dire que si $F$ est une primitive de $f$ et $G$ est une primitive de $g$, alors $F \times G$ serait une primitive de $f \times g$. Ce n'est pas vrai, car on n'a tout simplement pas $(F \times G)' = F' \times G'$ (cf dérivée d'un produit).*

www.ayoub-et-les-maths.com
ayoub.hajlaoui.scolaire@gmail.com