Inéquation et fonction trigonométrique

Ayoub Hajlaoui

Période fort troublante, je te fuis pour ma feuille,
Où ma plume se plante et oublie tes écueils.

Enoncé :

1) Résoudre dans $[0;\pi]$ l'équation $\cos x \geq -\dfrac{1}{2}$

2) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos^2(x) + \cos(x)$, de courbe représentative C_f.
a) Démontrer que f est 2π-périodique et paire. Qu'en déduire pour C_f ?
b) Démontrer que pour tout réel x, $f'(x) = -\sin(x)\big(2\cos(x) + 1\big)$
c) Construire le tableau de variations de f sur $[0;\pi]$

Correction :

1) *Derrière ses airs d'inéquation trigonométrique casse-tête à résoudre, cette question n'est pas si méchante. En effet, l'intervalle sur lequel on nous demande de résoudre l'inéquation est sympathique, car la fonction cosinus est strictement décroissante dessus, et ne repasse donc pas plusieurs fois par les mêmes valeurs... Pour rappel, on part de* $\cos 0 = 1$ *et on arrive à* $\cos\pi = -1$.

La fonction cosinus est strictement décroissante sur $[0;\pi]$.

Reste maintenant à retrouver la valeur de l'angle compris entre 0 *et* π *et dont le cosinus vaut* $-\dfrac{1}{2}$*...*
Soit on la connaît par cœur, soit :

On sait $\cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{1}{2}$. De plus, $\cos\left(\pi - \dfrac{\pi}{3}\right) = -\cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = -\dfrac{1}{2}$
En effet, n'oubliez pas $\cos(\pi - x) = -\cos(x)$

Donc $\cos\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) = -\dfrac{1}{2}$ (avec $\dfrac{2\pi}{3} \in [0;\pi]$)

On peut donc en conclure, pour tout $x \in [0;\pi]$:

$$\begin{aligned} \cos(x) \geq -\frac{1}{2} &\Leftrightarrow \cos(x) \geq \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) \\ &\Leftrightarrow x \leq \frac{2\pi}{3} \quad \text{(par décroissance de la fonction cos sur } [0;\pi]) \end{aligned}$$

Donc, sur $[0;\pi]$, $\boxed{\cos(x) \geq -\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x \leq \dfrac{2\pi}{3}.}$

Autrement dit, sur $[0;\pi]$, l'ensemble des solutions de cette inéquation est l'intervalle $\left[0;\dfrac{2\pi}{3}\right]$

2)a) Montrons : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x + 2\pi) = f(x)$
$\forall x \in \mathbb{R}, f(x + 2\pi) = \cos^2(x + 2\pi) + \cos(x + 2\pi) = \cos^2(x) + \cos(x)$ car la fonction cos est 2π-périodique. Donc :
$\forall x \in \mathbb{R}, f(x + 2\pi) = f(x)$. Donc $\boxed{f \text{ est } 2\pi\text{-périodique.}}$

www.ayoub-et-les-maths.com
ayoub.hajlaoui.scolaire@gmail.com

Montrons maintenant que f est paire.
$\forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = \cos^2(-x) + \cos(-x) = \cos^2(x) + \cos(x)$ car la fonction cos est paire. Donc :
$\forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = f(x)$.
Donc $\boxed{\text{la fonction } f \text{ est paire.}}$

On peut en déduire que pour avoir la courbe C_f, il suffit de l'étudier sur $[0;\pi]$. En effet, comme f est paire, sa courbe C_f admet l'axe des ordonnées comme axe de symétrie, et par symétrie, on peut donc déduire du morceau de courbe sur $[0;\pi]$, le morceau de courbe sur $[-\pi;\pi]$. Ensuite, par 2π-périodicité de f, on peut reproduire ce morceau sur $[\pi;3\pi]$, sur $[3\pi;5\pi]$ et ainsi de suite.. pour avoir toute la courbe sur $\mathbb{R}^+$ (et par symétrie, on l'aura sur tout $\mathbb{R}$).
Conclusion : il suffit d'étudier f sur $[0;\pi]$.

2)b) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ (par composition et somme de fonctions dérivables).
$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = u^2(x) + \cos(x)$ avec $u(x) = \cos(x)$
Donc $f'(x) = u'(x) \times 2u(x) - \sin(x) = -\sin(x) \times 2\cos(x) - \sin(x)$
D'où $\boxed{f'(x) = -\sin(x)\big(2\cos(x) + 1\big)}$

Voici un autre moyen de calculer cette dérivée. C'est toujours bien d'avoir plusieurs options. Si le tramway est bloqué par la neige, c'est bien qu'il y ait le métro...

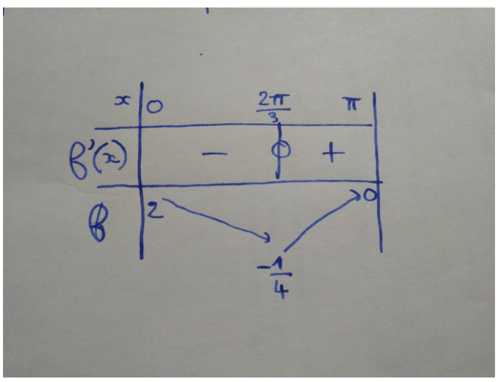
Méthode 2 : $f(x) = \cos^2(x) + \cos(x) = \cos(x)\big(\cos(x) + 1\big)$
Donc $f(x) = u(x)v(x)$ avec $u(x) = \cos(x)$ et $v(x) = \cos(x) + 1$
Donc $f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) = -\sin(x)\big(\cos(x) + 1\big) - \cos(x)\sin(x)$
Donc $f'(x) = -\sin(x)\cos(x) - \sin(x) - \cos(x)\sin(x)$
Donc $\boxed{f'(x) = -\sin(x)\big(2\cos(x) + 1\big)}$

2)c) Étudions le signe de f' sur $[0;\pi]$.
La fonction sinus est positive sur $[0;\pi]$. Donc $f'(x)$ est du signe de $-(2\cos(x) + 1)$ sur $[0;\pi]$.

$$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow 2\cos(x) + 1 \leq 0 \Leftrightarrow 2\cos(x) \leq -1 \Leftrightarrow \cos(x) \leq -\frac{1}{2}$$

Oh, ça tombe bien, cette inéquation...

D'après 1), $\cos(x) \leq -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x \geq \frac{2\pi}{3}$
Donc $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{2\pi}{3}$
On en déduit le tableau de signe de f' sur $[0;\pi]$, ainsi que le tableau de variations de f : (on calcule aussi $f(0)$, $f(\frac{2\pi}{3})$ et $f(\pi)$)



www.ayoub-et-les-maths.com
ayoub.hajlaoui.scolaire@gmail.com