Jongler avec sup

Ayoub Hajlaoui

Enoncé :

Soient A et B deux parties non vides de $\mathbb{R}$. On suppose que A et B sont majorées.
a) Montrer que leurs bornes supérieures existent.
b) Soit la partie $A+B=\{a+b| \;\; a\in A, b\in B\}$. Montrer que la partie $A+B$ est majorée, et montrer sup$(A+B)$=sup A + sup B

Correction :

a) Montrer, c'est peut-être un grand mot ici. Il nous suffit de citer le théorème...
A et B sont deux parties de $\mathbb{R}$ non vides majorées. Donc d'après le théorème de la borne supérieure, $\boxed{A \text{ et } B \text{ admettent chacune une borne supérieure.}}$

b) La partie $A+B$ est, par définition, l'ensemble des éléments de $\mathbb{R}$ qui peuvent s'écrire comme somme d'un élément de A et d'un élément de B. J'insiste... $A+B$ est bien une partie, et non un réel (le signe + pourrait nous faire croire qu'il s'agit d'une somme de deux réels, mais non... A et B sont des parties et non des réels. Et comme vous connaissez le sens de l'opération + sur les réels, voilà qu'on vous donne, en définition, le sens de l'opération + sur les parties).
On nous demande de trouver un majorant de $A+B$. Intuitivement, on penserait à sup A + sup B (l'existence de sup A et sup B ayant été établie à la question précédente). Prouvons que c'est en effet un majorant de $A+B$, en revenant à la définition de "majorant". Autrement dit, prouvons que pour tout $x\in A+B$, $\;x\leq$ sup A+ sup B.
Mais d'abord, avant de pouvoir rigoureusement écrire $\forall x\in A+B$... et dérouler mon raisonnement, il faut que je dise un mot sur le fait que $A+B$ est non vide...
A est non vide donc il existe $a\in A$. B est non vide donc il existe $b\in B$. Par définition de $A+B$, $a+b\in A+B$. Donc $A+B$ est non vide. *Quel scoop.*

Quel que soit x appartenant à $A+B$, il existe $x_1\in A$ et $x_2\in B$ tels que $x=x_1+x_2$ (cf définition de $A+B$).
Or, en tant qu'élément de A, $x_1\leq$ sup A. Et en tant qu'élément de B, $x_2\leq$ sup B.
En sommant ces deux inégalités, on obtient $x_1+x_2\leq$ sup A + sup B.
Autrement dit, $x\leq$ sup A + sup B. Ceci étant vrai pour tout $x\in A+B$, on en conclut :
sup A+ sup B est bien un majorant de $A+B$. Donc $\boxed{\text{la partie } A+B \text{ est bien majorée.}}$

Ca, parfois, ça vous bloque... "Nous venons d'exhiber un majorant de cette partie $A+B$, mais n'aurions-nous pas dû d'abord prouver l'existence d'un majorant avant de le déterminer ?" Ce à quoi je réponds "en montrant qu'un certain nombre majore cette partie, nous montrons bien que cette partie est majorée." Et nous allons même un petit peu plus loin que ce qui est demandé, mais parfois, c'est la manière la plus simple...
C'est la même idée dans certains exercices sur les limites où l'on demande de montrer qu'une suite converge vers une limite. Parfois, vous y arriverez au moyen de considérations purement théoriques, sans recherche d'une limite particulière. Mais si vous démontrez (rigoureusement) que ladite suite tend - je dis n'importe quoi - vers 3, vous avez bien répondu à l'énoncé, même si ce dernier ne vous demandait pas de la calculer.

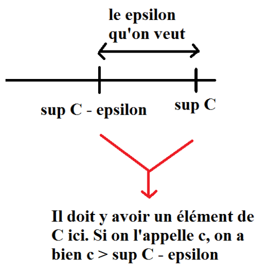
Montrons maintenant l'égalité $\sup(A+B)=\sup A + \sup B$.

Autrement dit, montrons que le réel $\sup A + \sup B$ *est la borne supérieure de* $A+B$*. Que savons-nous déjà sur* $\sup A + \sup B$ *? Qu'il est un majorant de* $A+B$*...*

Nous avons montré que $\sup A + \sup B$ était un majorant de la partie $A+B$. Or, par définition, $\sup(A+B)$ est le plus petit des majorants de $A+B$. Donc $\sup(A+B) \leq \sup A + \sup B$.

Ce n'est déjà pas mal... Mais comment concrétiser en prouvant l'égalité ? Deux pensées principales peuvent nous tarauder (peut-être plus, mais personnellement, je n'ai que les deux suivantes en tête) :
- faut-il prouver l'inégalité inverse $\sup A + \sup B \leq \sup(A+B)$ *pour en conclure l'égalité ? (par antisymétrie de la relation d'ordre* $\leq$*, histoire de frimer un petit peu avec des mots savants...)*
- ou faut-il, par exemple, tenter un raisonnement par l'absurde ?
Pour ce qui est de la seconde option, il peut être intéressant d'y penser, mais il n'est pas forcément évident de voir comment tomber simplement sur une absurdité en partant de $\sup A + \sup B > \sup(A+B)$*. Vous pouvez toujours essayer... C'est toujours bien de se confronter directement à de tels culs-de-sac, ne serait-ce que pour s'entraîner à voir la différence entre une situation coincée et une situation pleine d'opportunités...*

Quant à la première option, son exploration nécessite de se re-pencher sur la définition de sup. Peut-être y a-t-il une carte à jouer que nous n'avons pas encore prise en compte... Le sup est le plus petit des majorants, ça, d'accord. Mais le cours nous dit aussi que pour une partie C *admettant une borne supérieure, on peut trouver dans* C *des éléments aussi proches que l'on veut de* $\sup C$*. Si* $\sup C$ *est un élément de* C *(auquel cas ce serait un maximum),* $\sup C$ *est aussi proche qu'on veut de lui-même (ben oui...) Si* $\sup C$ *n'est pas un élément de* C*, pour tout* $\epsilon > 0$ *(aussi petit soit-il), on peut trouver un élément* c *de* C *tel que* $c > \sup C - \epsilon$ *(voir* ϵ *comme une distance)*



Un petit schéma pour mieux comprendre

$\forall \epsilon > 0$, il existe $a_\epsilon \in A$ tel que $a_\epsilon \geq \sup A - \epsilon$.
$\forall \epsilon > 0$, il existe $b_\epsilon \in B$ tel que $b_\epsilon \geq \sup B - \epsilon$.
En sommant simplement ces deux inégalités, on obtient :
$\forall \epsilon > 0$, il existe $a_\epsilon \in A$ et $b_\epsilon \in B$ tels que $\underline{a_\epsilon + b_\epsilon \geq \sup A + \sup B - 2\epsilon}$.

Or, par définition de la partie $A+B$, le réel $a_\epsilon + b_\epsilon$ appartient à $A+B$.
Donc nécessairement, $\underline{\sup(A+B) \geq a_\epsilon + b_\epsilon}$

On a donc *(en combinant les deux dernières inégalités soulignées)* :
$\forall \epsilon > 0$, $\sup(A+B) \geq \sup A + \sup B - 2\epsilon$
Ceci est vrai pour tout ϵ *strictement positif, aussi petit que l'on veut.*

En faisant tendre ϵ vers 0 dans la dernière inégalité, on obtient alors : $\sup A + \sup B \leq \sup(A+B)$
De plus, nous avions déjà prouvé $\sup(A+B) \leq \sup A + \sup B$
Donc par antisymétrie de la relation d'ordre $\leq$, on a en fait : $\boxed{\sup(A+B) = \sup A + \sup B}$

www.ayoub-et-les-maths.com
ayoub.hajlaoui.scolaire@gmail.com

Po po po, le correcteur a les yeux pleins d'étoiles... Plus sérieusement, il n'était pas nécessaire ici d'évoquer l'antisymétrie de la relation d'ordre $\leq$. Pas besoin de s'étendre longuement sur le fait que si $a \leq b$ et $b \leq a$, alors $a = b$ (sauf s'il s'agit d'un exercice axé sur les relations d'ordre). C'est juste que l'occasion était trop belle pour moi de faire un lien avec le début de votre cours...

www.ayoub-et-les-maths.com
ayoub.hajlaoui.scolaire@gmail.com