

Lemme de Cesàro

Ayoub Hajlaoui

Les passages en italique correspondent à ce qui est censé expliquer le "pourquoi" des idées. Un correcteur d'examen vous corrige non pas sur les raisons qui vous ont poussé à avoir telle ou telle idée, mais sur la validité mathématique de votre raisonnement. Sauf cas particulier, le "pourquoi" de vos idées l'intéresse à peu près autant que ce que vous avez mangé à midi.

Mais s'il n'est pas forcément de bon ton de mettre tous vos états d'âme sur une copie de partiel, vous entraîner à avoir ces idées est, à mon sens, une priorité. Vous êtes notés sur la pertinence de vos raisonnements, mais c'est au niveau de l'idée qu'ils naissent. D'ailleurs, nombreux sont les élèves qui comprennent la correction lorsqu'elle leur est exposée, mais restent interloqués en se demandant comment ils auraient pu "penser à ça". Entraînons-nous donc à aiguiser notre flair mathématique...

Vous l'avez donc bien compris, les passages en italique ne font pas à proprement parler partie de la correction, mais en sont des commentaires.

Énoncé :

Soit u une suite réelle. On suppose qu'elle converge vers un certain réel l . Pour tout entier $n \geq 1$, on pose $v_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u_k$
Montrer que la suite v converge aussi vers l . (c'est ce qu'on appelle le lemme de Cesàro)

Correction :

Par où commencer ? On serait tentés d'écrire $v_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u_k \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n l = \frac{1}{n} \times nl = l$. CQFD.

Ça nous arrangerait beaucoup, mais c'est complètement faux. Faux parce que tous les termes de la somme ne se comportent pas de la même manière lorsque $n \rightarrow +\infty$. Le dernier terme de cette somme, u_n , tend bien vers l lorsque $n \rightarrow +\infty$. Mais les premiers termes ne tendent vers rien du tout ! Enfin si, ils tendent vers eux-mêmes : u_1, u_2, u_3 etc... sont des constantes. On a beau faire tendre n vers $+\infty$, elles n'en ont rien à faire !

De ce constat vient l'idée suivante : il va falloir séparer cette somme en deux, c-à-d séparer les termes assez proches de l (lorsque k est assez grand) des autres (lorsque k est petit). Et c'est ici qu'on doit avoir le réflexe de travailler avec les epsilon, parce que dans la définition de convergence avec les epsilon, on parle bien de ce qu'il se passe lorsque le rang est assez grand (c-à-d lorsqu'il dépasse un certain N ...)

On sait que u converge vers l . Donc :

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (k > N \Rightarrow |u_n - l| < \epsilon) \quad (1)$$

Et on veut montrer :

$$\forall \epsilon > 0, \exists M \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (k > M \Rightarrow |v_n - l| < c\epsilon) \quad (2)$$

A priori, il n'y a aucune raison pour que N et M soient les mêmes. De plus c , est une constante quelconque. Pourquoi chercher à prouver $\dots < c\epsilon$ et pas $\dots < \epsilon$? Car ce c nous simplifie la tâche, au cas où nous n'arriverions pas, par nos calculs, à majorer directement par ϵ , mais où nous arriverions à quelque chose du genre $\dots < 2\epsilon$



On veut montrer (2) pour tout $\epsilon > 0$. Donc :

Fixons $\epsilon > 0$. $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} |v_n - l| &= \left| \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u_k \right) - l \right| = \left| \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u_k \right) - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n l \right| \quad (\text{incorporons } l \text{ à } \Sigma) \\ &= \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (u_k - l) \right| \\ &\leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |u_k - l| \quad (\text{cf inégalité triangulaire}) \end{aligned}$$

Et c'est maintenant qu'on va mettre en oeuvre l'idée géniale de séparer la somme en deux. La proposition (1) nous garantit l'existence d'un rang N à partir duquel nos $|u_k - l|$ vont tous être plus petits que ϵ . Notre somme, dont les indices vont de $k = 1$ à $k = n$, va donc être séparée en deux sommes, dont les indices vont, pour la première, de $k = 1$ à $k = N$, et pour la seconde, de $k = N + 1$ à $k = n$.

Mais cela présuppose, me direz-vous, que n soit strictement supérieur à N (si vous ne voyez pas pourquoi, relisez attentivement le paragraphe précédent). Et cela ne nous pose aucun problème ! Dans nos inégalités, nous n'écrivons plus $\forall n \in \mathbb{N}$, mais plutôt $\forall n > N$. Revenons à nos moutons :

$\forall n > N$, (même somme, mais séparée en deux cette fois-ci)

$$\begin{aligned} |v_n - l| &\leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^N |u_k - l| + \frac{1}{n} \sum_{k=N+1}^n |u_k - l| \\ &\leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^N |u_k - l| + \frac{1}{n} \sum_{k=N+1}^n \epsilon \quad \text{cf proposition (1)} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^N |u_k - l| + \frac{n - N}{n} \epsilon \end{aligned}$$

car la seconde somme contenait n termes, tous égaux à ϵ .

$$\begin{aligned} \text{Donc } |v_n - l| &\leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^N |u_k - l| + \frac{n - N}{n} \epsilon < \frac{1}{n} \sum_{k=1}^N |u_k - l| + \epsilon \quad (*) \\ &\text{car } \frac{n - N}{n} < 1. \end{aligned}$$

Arrivés à ce stade, on constate que, derrière ses airs de somme imposante, $\sum_{k=1}^N |u_k - l|$ n'est qu'une pauvre constante (car N est un entier fixé). Attendez juste que n tende vers $+\infty$, et le $\frac{1}{n}$ qui multiplie cette somme n'en fera qu'une bouchée. Tout ça pour dire que lorsque n tendra vers $+\infty$, $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^N |u_k - l|$ tendra vers 0.

On pourrait donc être fortement tentés de plier l'exercice en disant que comme $|v_n - l|$ est plus petit que la somme d'un truc tendant vers 0 et de ϵ , il tendra vers 0, et s'arrêter là. Mais il ne serait pas rigoureux de finir l'exercice de la sorte.

Nous avons commencé avec des ϵ , dans l'optique de tomber sur une inégalité avec des ϵ , vraie à partir d'un certain rang, pour montrer (2). Nous devons donc nous atteler à cette tâche. Ce qui a commencé proprement doit se terminer tout aussi proprement.

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^N |u_k - l| &\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0. \text{ Donc } \exists N_2 \in \mathbb{N} \text{ tel que pour tout } n > N_2, \\ \left| \frac{1}{n} \left(\sum_{k=1}^N |u_k - l| \right) - 0 \right| &< \epsilon, \text{ c'est-à-dire } \frac{1}{n} \sum_{k=1}^N |u_k - l| < \epsilon \end{aligned}$$

Tout à l'heure, j'avais imposé à n la condition $n > N$, maintenant, je lui rajoute en plus la condition $n > N_2$. Comment écrire de manière plus synthétique " $n > N$ et $n > N_2$ " ? Il suffit d'écrire " $n > \max(N, N_2)$ ".



En reprenant (*), on obtient : $\forall n > \max(N, N_2), |v_n - l| < \epsilon + \epsilon = 2\epsilon$

On a donc trouvé un $M \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n > M, |v_n - l| < 2\epsilon$. Ce M , c'est $\max(N, N_2)$

On a montré : $\forall \epsilon > 0, \exists M \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n > M, |v_n - l| < 2\epsilon$.

Comment ça, on a montré $\forall \epsilon > 0$... ? Ben oui, on avait fixé un quelconque $\epsilon > 0$, et on a montré l'existence de ce M . Notre raisonnement tient donc quelque soit le ϵ .

Donc v converge vers l. En effet, on a montré (2) avec $M = \max(N, N_2)$ et $c = 2$.

Voilà... Si la démonstration de ce lemme était une pièce de théâtre, les passages en italique seraient ses didascalies. J'espère que les didascalies vous auront aidé à comprendre la pièce, et, le cas échéant, j'attends que vous preniez votre plume pour écrire la suite (sans mauvais jeu de mot). Autrement dit, que vous vous penchiez sur la réciproque.



www.ayoub-et-les-maths.com



ayoub.hajlaoui.scolaire@gmail.com