Pompe à vélo

Ayoub Hajlaoui

Attendez juste un coup que ma roue soit replète,
Et je ferai le tour du monde en bicyclette.

Enoncé :

On gonfle un pneu de bicyclette de volume V, initialement à plat, avec une pompe de volume de compression v et de volume de raccord r.

Au départ, la pression dans le pneu, la pompe et le raccord, est égale à la pression extérieure p_0. Après n coups de pompe, la pression dans le pneu est p_n. Lorsqu'on donne un $(n+1)$-ème coup de pompe, il se produit le phénomène physique suivant :
- L'air se comprime dans la pompe jusqu'à obtenir un volume w_n ($w_n < w$), volume atteint au moment où la pression dans la pompe atteint p_n. Les équations physiques donnent $p_0(v+r) = p_n(w_n + r)$
- A ce moment, la valve s'ouvre, et l'on poursuit jusqu'à passer dans la pompe du volume w_n à 0. On a alors $p_n(w_n + r + V) = p_{n+1}(r + V)$

Quelle est la pression limite obtenue dans le pneu ?

Indication : On pourra démontrer que la suite (p_n) est une suite arithmético-géométrique et étudier sa convergence.

Considérations tactiques :

Ceci est un exercice de mathématiques. Je le rappelle pour dissiper les inquiétudes de ceux qui n'auraient pas compris des aspects techniques exposés dans l'énoncé. Soyons bien clairs : la compréhension parfaite desdits aspects n'est pas une condition nécessaire pour résoudre l'exercice avec brio. Vous ne connaissez pas parfaitement le fonctionnement d'une pompe ? Vous ne savez pas ce qu'est un raccord ? Pas grave (ici, en tous cas).

Bien sûr, il est plus " joli " de comprendre le phénomène physique et ensuite résoudre le problème mathématique qui en découle. Mais comprenez que les tâches sont divisées : ici, c'est un problème mathématique. Le physicien a travaillé avant nous, pour nous donner les équations mathématiques qui nous serviront. C'est souvent le cas dans le domaine des mathématiques appliquées : d'autres scientifiques (biologistes, chimistes, physiciens...) donnent au mathématicien les équations régissant le phénomène à étudier, avec lesquelles ce dernier se débrouille.

Une fois qu'on aura démontré que (p_n) est arithmético-gémométrique, c'est-à-dire qu'elle vérifie une relation de la forme $p_{n+1} = ap_n + b$, on sera ramenés à l'exercice bateau de suites en Terminale (introduire une suite auxiliaire qu'on prouve géométrique, dont on aura plus facilement le terme général, pour ensuite trouver celui de (p_n)). Sauf que cette fois-ci, il faudra trouver nous-mêmes une suite auxiliaire intelligente à introduire...

Correction :

Tout d'abord, montrons que (p_n) est arithmético-géométrique ; autrement dit, qu'il existe a et b réels tels que : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $p_{n+1} = ap_n + b$.
Il n'y a pas mille choses à faire. Nous n'avons que deux équations sur lesquelles jouer..

$$\begin{aligned} p_0(v+r) &= p_n(w_n + r) \quad (1) \\ p_n(w_n + r + V) &= p_{n+1}(r+V) \quad (2) \end{aligned}$$

www.ayoub-et-les-maths.com
ayoub.hajlaoui.scolaire@gmail.com

L'équation (2) peut se réécrire $p_n(w_n + r) + p_n \times V = p_{n+1}(r + V)$ *(en développant intelligemment)*
Ensuite, en remplaçant $p_n(w_n + r)$ par $p_0(v + r)$ (cf équation (1)) dans l'équation (2), on obtient :

$$\begin{aligned} p_0(v + r) + p_n \times V &= p_{n+1}(r + V) \\ \text{c'est-à-dire } p_{n+1} &= \frac{V}{r + V} \times p_n + p_0 \frac{(r + v)}{(r + V)} \end{aligned}$$

D'après l'énoncé, $r + V$ est un volume (non nul), ce qui a rendu notre division possible.

On a donc réussi à écrire $p_{n+1} = ap_n + b$, où a et b sont deux constantes définies par $\boxed{a = \frac{V}{r + V}}$ et $\boxed{b = p_0 \frac{(r + v)}{(r + V)}}$

Oui, oui, p_0 est bien une constante, c'est le premier terme de la suite, il ne dépend pas de n...

Donc $\boxed{(p_n) \text{ est une suite arithmético-géométrique.}}$

Maintenant, mesdames et messieurs, je demande toute votre attention. Nous allons disséquer une bonne fois pour toutes, sous vos yeux ébahis, l'exercice-type de suites arithmético-géométriques (tellement classique qu'il en devient ennuyant). Cette fois-ci, nous n'allons même pas attendre qu'un énoncé nous donne la suite (v_n) à introduire, nous allons la trouver nous-mêmes).

En général, l'exercice-type de suites arithmético-géométriques commence par une suite (u_n) arithmético-géométrique, et nous demande ensuite de considérer une suite auxiliaire (v_n) définie par $v_n = u_n - l$ (où l est une constante) telle que (v_n) soit géométrique. $u_n + l$ ou $u_n - l$, ça revient au même, au signe de l près ; le l pour les uns peut être le $-l$ pour les autres)

Si vous avez bien suivi, vous devez avoir abouti à la même conclusion que moi : il nous suffit de trouver un l qui marche.

Trouvons un réel l tel que la suite w définie par $w_n = p_n - l$ soit géométrique.
Je l'ai appelée w et non pas v pour qu'il n'y ait pas de confusion avec les volumes de l'énoncé.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad w_{n+1} = p_{n+1} - l = ap_n + b - l$$

On voudrait pouvoir écrire $w_{n+1} = qw_n$ où q est une constante.
Mmm... Qui serait un bon candidat ? Si je dois factoriser ce que j'ai obtenu précédemment, ce serait par a, ce a qui est devant le p_n..

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad w_{n+1} = p_{n+1} - l = a\big(p_n + \frac{b - l}{a}\big)$$

a est bien non nul ($a = \frac{V}{r + V}$), ce qui permet la division.

Ce serait bien de pouvoir écrire $w_{n+1} = aw_n$...

Pour avoir $w_{n+1} = aw_n$, il suffirait d'avoir $p_n + \frac{b - l}{a} = w_n = p_n - l$

Autrement dit, il suffirait d'avoir

$$\begin{aligned} \frac{b - l}{a} = -l \Leftrightarrow b - l = -al \quad &\Leftrightarrow \quad l(1 - a) = b \\ &\Leftrightarrow \quad l = \frac{b}{1 - a} \end{aligned}$$

On peut diviser par $1 - a$ car $a = \frac{V}{r + V} < 1$ (donc a est différent de 1 et donc $1 - a$ différent de 0).
Pourquoi $a < 1$? Comparez V et $r + V$...
Remarquez que cette méthode ne marche pas si $a = 1$... Mais dans ce cas, à quoi servirait-elle vu que la suite de départ serait tout simplement arithmétique ? (Essayez de voir pourquoi, bien sûr)

On vient donc de montrer que la suite (w_n) définie pour tout entier naturel n par la relation suivante avec (p_n) est géométrique de raison $a = \dfrac{V}{r+V}$.

$$\begin{aligned} w_n = p_n + \frac{b}{1-a} = p_n + p_0 \frac{r+v}{r+V} \times \frac{1}{1-\frac{V}{r+V}} &= p_n + p_0 \frac{r+v}{r+V} \times \frac{r+V}{r+V-V} \\ &= p_n + p_0 \times \frac{r+v}{r} \end{aligned}$$

Le premier terme de (w_n) est $v_0 = p_0 + p_0 \times \dfrac{r+v}{r} = p_0(1 + \dfrac{r+v}{r}) = \dfrac{2r+v}{r} p_0$ On peut avoir le terme général de w_n d'après le cours ((w_n) étant une suite géométrique de raison et de premier terme connus).

Mais ai-je besoin du terme général de (w_n), au vu de la question posée par l'énoncé ? Pas vraiment, en fait. Il me suffit juste de connaître sa limite...

(w_n) est géométrique de raison $a = \dfrac{V}{r+V}$ et $-1 < a < 1$ (plus précisément, $0 < a < 1$). Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 0$

De plus, $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = w_n + l$.

Par théorème d'opérations sur les limites, on a alors $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = l$

Oh, l est la limite... Aurais-je donc choisi la lettre l avec une arrière-pensée ?

Autrement dit, $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = \dfrac{b}{1-a}$ (calculé précédemment).

Finalement, $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = p_0 \times \dfrac{r+v}{r}$

$\boxed{\text{La pression limite obtenue dans le pneu est donc } l = p_0 \times \dfrac{r+v}{r}}$

Elle est bien supérieure à la pression extérieure p_0 vu que $\dfrac{r+v}{r} > 1$. Encore heureux...

www.ayoub-et-les-maths.com
ayoub.hajlaoui.scolaire@gmail.com