Suite et exponentielles

Ayoub Hajlaoui

Vif comme un coup d'épée, l'esprit poli, vaillant,
De votre cours drapé, soyez polyvalent.

Enoncé :

Soit a un nombre réel fixé non nul. Le but de cet exercice est d'étudier la suite (u_n) définie par : $u_0 = a$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = e^{2u_n} - e^{u_n}$.

1) Soit g la fonction définie pour tout réel x par : $g(x) = \mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^x - x$.
a) Calculer $g'(x)$ et prouver que, pour tout réel x : $g'(x) = (\mathrm{e}^x - 1)(2\mathrm{e}^x + 1)$.
b) Déterminer les variations de la fonction g et donner la valeur de son minimum.
c) Étudier le sens de variation de la suite (u_n).

2) Dans cette question, on suppose que $a \leqslant 0$.
a) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant 0$.
b) Déduire des questions précédentes que la suite (u_n) est convergente.
c) Dans le cas où a vaut 0, donner la limite de la suite (u_n).

3) Dans cette question, on suppose que $a > 0$.
a) Démontrer que, pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} - u_n \geqslant g(a)$.
b) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a :
$u_n \geqslant a + n \times g(a)$.
c) Déterminer la limite de la suite (u_n).

Considérations tactiques :

Rappelons que tous les points sont bons à prendre. Il faut savoir détecter les questions " données ", comme la 2)b). Il est vrai qu'une difficulté de cet exercice est la dépendance assez grande entre les questions.

Correction :

1)a) *Pour dériver e^{2x} : rappelons que pour une fonction u dérivable, la dérivée de e^u est $u'\mathrm{e}^u$. Ça se retrouve aussi en utilisant la formule générale de dérivation d'une composée de fonctions, à la limite du hors-programme : $(gof)'(x) = f'(x) \times g'(f(x))$. (La fonction g étant, dans notre cas, la fonction exponentielle, et la fonction $f : x \to 2x$)*

Par composition et somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, g est dérivable sur $\mathbb{R}$.
$\forall x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = 2e^{2x} - e^x - 1$

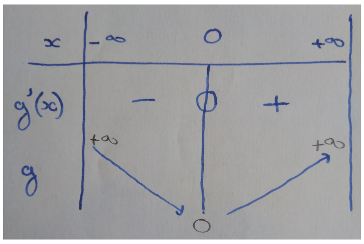
Pour montrer l'égalité demandée, soit on se casse la tête à essayer de factoriser $2e^{2x} - e^x - 1$, soit on se montre plus paresseux et on part de $(e^x - 1)(2e^x + 1)$ pour le développer. Tant qu'elle reste un moteur d'efficacité, la paresse est une qualité.

$\forall x \in \mathbb{R},\ (\mathrm{e}^x - 1)(2\mathrm{e}^x + 1) = 2e^{2x} + e^x - 2e^x - 1 = 2e^{2x} - e^x - 1 = g'(x)$

Donc : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ g'(x) = (\mathrm{e}^x - 1)(2\mathrm{e}^x + 1)}$

1)b) Étudions le signe de $g'(x) = (e^x - 1)(2e^x + 1)$ sur $\mathbb{R}$.
$\forall x \in \mathbb{R},\ e^x > 0$ donc $2e^x + 1 > 1 > 0$. Donc $g'(x)$ est du même signe que $e^x - 1$.

$e^x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow e^x \geq 1 \Leftrightarrow e^x \geq e^0 \Leftrightarrow x \geq 0$ (avec annulation si et seulement si $x = 0$) car la fonction exp est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. On peut donc dresser le tableau de signe de $g'(x)$ et le tableau de variations de g :



Les variations de g nous indiquent que g admet un minimum en 0. Ce minimum est $g(0) = e^0 - e^0 - 0 = 0$.

Techniquement, l'énoncé ne nous demande pas de calculer les limites de g en $-\infty$ et $+\infty$, mais faisons-le quand même, pour nous entraîner.

$\lim\limits_{x\to-\infty} e^{2x} = 0$, $\lim\limits_{x\to-\infty} -e^x = 0$, et $\lim\limits_{x\to-\infty} -x = +\infty$

Donc, par opérations sur les limites, $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} e^{2x} = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} -e^x = -\infty$, et $\lim\limits_{x\to+\infty} -x = -\infty$

Forme indéterminée, factorisons par e^{2x}, dont nous nous doutons qu'il est le plus " fort " en $+\infty$.

$g(x) = e^{2x}\left(1 - \dfrac{e^x}{e^{2x}} - \dfrac{x}{e^{2x}}\right) = e^{2x}\left(1 - \dfrac{1}{e^x} - \dfrac{x}{e^x} \times \dfrac{1}{e^x}\right)$

$\lim\limits_{x\to+\infty} e^{2x} = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{e^x} = 0$, et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{e^x} = 0$ (croissance comparée)

Donc, par opérations sur les limites, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$

1)c) *On nous fait travailler sur une fonction g, et là, comme ça, " de nulle part ", on nous lance sur une suite (u_n). il faut bien voir le lien entre les deux, sinon, on se retrouve dans les choux.*

Pour étudier le sens de variations de la suite (u_n), étudions le signe de $u_{n+1} - u_n$:

$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = e^{2u_n} - e^{u_n} - u_n = g(u_n)$

Mais au fait, avons-nous étudié quelque part le signe de la fonction g ? Pas directement, pas directement...

D'après 1)b), g a pour minimum 0. Donc g est positive sur $\mathbb{R}$.

Donc : $\forall n \in \mathbb{N},\ g(u_n) \geq 0$. Et donc : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - u_n \geq 0$. Donc la suite (u_n) est croissante.

2)a) Démontrons par récurrence sur n : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq 0$.

Initialisation : $u_0 = a \leq 0$ d'après l'énoncé.

Hérédité : Supposons que pour un certain rang n, $u_n \leq 0$.

Comment montrer $u_{n+1} \leq 0$? Si (u_n) était décroissante, on aurait pu écrire $u_{n+1} \leq u_n \leq 0$. Mais non, elle est croissance. Bon. Factorisons u_{n+1}, ça sera plus simple pour son signe...

$u_{n+1} = e^{2u_n} - e^{u_n} = e^{u_n}(e^{u_n} - 1)$

$e^{u_n} > 0$ (fonction exponentielle strictement positive).

Mais on a aussi $u_n \leq 0$, donc $e^{u_n} \leq e^0$ (croissance de la fonction exp). Donc $e^{u_n} \leq 1$. Donc $e^{u_n} - 1 \leq 0$.

Donc $e^{u_n}(e^{u_n} - 1) \leq 0$, c'est-à-dire $u_{n+1} \leq 0$. Donc $u_n \leq 0 \Rightarrow u_{n+1} \leq 0$.

Conclusion : Le principe de raisonnement par récurrence nous permet de conclure : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq 0$.

2)b) (u_n) est croissante (d'après 1)c)) et majorée par 0 (d'après 2)a)). Donc (u_n) est convergente.

En conditions réelles d'examen, si vous avez eu du mal avec les questions précédentes, il serait impardonnable que vous passiez à côté de celle-ci, où les points sont donnés. Un cadeau, ça s'accepte. Bien sûr, vous pourriez rétorquer que si on n'a pas traité la 1)c), on ne peut pas connaître le sens de variations de (u_n). Je répondrais alors qu'il suffit de ruser, et d'indiquer sur sa copie qu'on suppose que le résultat de la 1)c) est " (u_n) croissante ".

www.ayoub-et-les-maths.com
ayoub.hajlaoui.scolaire@gmail.com

2)c) Si $a = 0$ (c'est-à-dire si $u_0 = 0$) :
On sait (u_n) croissante (d'après 1)c)). Donc $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq u_0$. Donc $\underline{u_n \geq 0}$.
De plus, $\forall n \in \mathbb{N},\ \underline{u_n \leq 0}$ (d'après 2)a)).
Donc : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 0$.
Dans ce cas, la suite (u_n) est constante égale à 0. $\boxed{(u_n) \text{ a donc pour limite } 0.}$

3)a) $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - u_n = e^{2u_n} - e^{u_n} - u_n = g(u_n)$.
Comment faire le lien avec $g(a)$? On sait que (u_n) est croissante (cf 1)c)), donc $u_n \geq u_0$...
(u_n) est croissante. Donc : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq u_0$, c'est-à-dire $\underline{u_n \geq a}$
g va devoir entrer dans le jeu des inégalités... Il va donc falloir se poser la question de ses variations, ou plutôt y revenir puisque ça a déjà été traité.
$a > 0$ dans cette question (donc u_n aussi puisque $u_n \geq a$).
De plus, g est croissante sur $[0; +\infty[$ (d'après 1)b)).
Donc : $\forall n \in \mathbb{N},\ g(u_n) \geq g(a)$. Autrement dit : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - u_n \geq g(a).}$

3)b) Démontrons par récurrence sur n : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geq a + n \times g(a)$.
Initialisation : $u_0 = a$ et $a + 0 \times g(a) = a$ donc $u_0 \geq a + 0 \times g(a)$.
Hérédité : Supposons que pour un certain rang n, $u_n \geq a + n \times g(a)$.
D'après 3)a) : $u_{n+1} \geq u_n + g(a)$.
Donc d'après l'hypothèse de récurrence, $u_{n+1} \geq a + ng(a) + g(a)$.
Autrement dit, $u_{n+1} \geq a + (n+1)g(a)$.
Donc $\underline{\left(u_n \geq a + n \times g(a)\right) \Rightarrow \left(u_{n+1} \geq a + (n+1)g(a)\right)}$.
Conclusion :
Le principe de raisonnement par récurrence nous permet de conclure : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geq a + n \times g(a).}$

3)c) $g(a) > 0$. (car $a > 0$ et g est strictement croissante sur $[0; +\infty[$)
Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} a + n \times g(a) = +\infty$
Attention en effet au signe de $g(a)$, il détermine si la limite est $+\infty$ ou $-\infty$
Or, d'après 3)b) : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq a + n \times g(a)$.
Donc, par théorème de comparaison, $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty.}$

www.ayoub-et-les-maths.com
contact@ayoub-et-les-maths.com