Suite et indépendance d'événements

Ayoub Hajlaoui

Du blanc lunaire au noir de jais, les peintres marient les couleurs ;
Quant à vos faiseurs de sujets, leurs liaisons charrient vos douleurs.

Énoncé :

Une urne contient 5 boules noires et 5 boules blanches. On en prélève n successivement et avec remise, n étant un entier naturel supérieur ou égal à 2. On considère les deux évènements suivants :

A : « On obtient des boules des deux couleurs » ;

B : « On obtient au plus une blanche ».

1) a) Calculer la probabilité de l'évènement : « Toutes les boules tirées sont de même couleur ».
b) Calculer la probabilité de l'évènement : « On obtient exactement une boule blanche ».
c) En déduire que les probabilités $P(A \cap B)$, $P(A)$, $P(B)$ sont :

$$P(A \cap B) = \frac{n}{2^n}, \quad P(A) = 1 - \frac{1}{2^{n-1}}, \quad P(B) = \frac{n+1}{2^n}.$$

2) Montrer que $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ si et seulement si $2^{n-1} = n + 1$.

3) Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel $n \geq 2$ par $u_n = 2^{n-1} - (n+1)$.
Calculer u_2, u_3, u_4. Démontrer que (u_n) est strictement croissante.

4) En déduire la valeur de l'entier n tel que les évènements A et B soient indépendants.

Considérations tactiques :

Bien qu'elle ne soit pas particulièrement difficile sur un plan théorique, la question 1 (a, b et c) peut déstabiliser bon nombre d'élèves. En condition réelle d'examen, il ne faut pas hésiter, en cas de gros blocage, à reprendre le flambeau dès la question 2. Le sujet est " gentil " dans le sens où, à la fin de la 1), il donne les probabilités à trouver. On peut donc s'en servir pour la suite (oui, le jeu de mot est voulu).

Correction :

1)a) *Le genre d'énoncé fâcheux qui ne donne pas des noms (lettres) à tous les événements dont on aura besoin... Je ne prendrai pas la lettre B pour "blanche", car cette lettre est déjà prise par l'énoncé, pour désigner autre chose.*

Soit C l'événement "toutes les boules tirées sont de même couleur."

Soit N_i l'événement : "la i-ème boule tirée est noire". L'événement "toutes les boules tirées sont de la même couleur" correspond à "toutes les boules tirées sont noires ou toutes les boules tirées sont blanches", c'est-à-dire $C = (N_1 \cap N_2 \cap ... \cap N_n) \cup (\overline{N_1} \cap \overline{N_2} \cap ... \cap \overline{N_n})$.

Les deux événements $(N_1 \cap N_2 \cap ... \cap N_n)$ et $(\overline{N_1} \cap \overline{N_2} \cap ... \cap \overline{N_n})$ sont 2 à 2 disjoints (intersection vide). (En effet, on ne peut pas avoir "toutes les boules tirées sont blanches" et "toutes les boules tirées sont noires")

Donc $\underline{P(C) = P(N_1 \cap N_2 \cap ... \cap N_n) + P(\overline{N_1} \cap \overline{N_2} \cap ... \cap \overline{N_n})}$
Le dernier terme de la formule $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ a disparu à cause de la remarque précédente.

Or, les tirages se font avec remise *(on remet la boule tirée après chaque tirage).*

www.ayoub-et-les-maths.com
ayoub.hajlaoui.scolaire@gmail.com

Ils sont donc indépendants les uns des autres, car la composition de l'urne ne change pas entre un tirage et les suivants.
Donc N_1, N_2... N_n sont indépendants (de même pour $\overline{N_1}$, $\overline{N_2}$... $\overline{N_n}$)
Donc $P(N_1 \cap N_2 \cap ... \cap N_n) = P(N_1) \times P(N_2) \times ... \times P(N_n)$
Or, $P(N_1) = P(N_2) = ... = P(N_n) = \frac{1}{2}$ (une chance sur deux de tirer une boule noire pour un tirage donné, vu que la moitié des boules de l'urne sont noires)
Donc $P(N_1) \times P(N_2) \times ... \times P(N_n) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times ... \times \frac{1}{2} = (\frac{1}{2})^n = \frac{1}{2^n}$
Donc $P(N_1 \cap N_2 \cap ... \cap N_n) = \frac{1}{2^n}$
De la même manière, on obtient, $P(\overline{N_1} \cap \overline{N_2} \cap ... \cap \overline{N_n}) = \frac{1}{2^n}$
Donc *(voir égalité soulignée)* $P(C) = \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n} = \frac{2}{2^n}$
Donc $\boxed{P(C) = \frac{1}{2^{n-1}}}$

1)b) Soit E l'événement : " on obtient exactement une boule blanche ".
Comme précédemment, on partitionne notre événement en événements dont les probabilités seront plus simples à calculer...
Pour tout i entre 1 et n, soit E_i l'événement : " on obtient exactement une boule blanche, et elle est obtenue au i-ème tirage. "
Autrement dit, par exemple, $E_1 = \overline{N_1} \cap N_2 \cap N_3 \cap ... \cap N_n$
Remarquons $E = E_1 \cup E_2 \cup ... \cup E_n$
De plus, les événements E_i sont 2 à 2 disjoints (si on obtient exactement une boule blanche, on ne peut pas l'avoir obtenue à deux tirages différents).
On a donc $\underline{P(E) = P(E_1) + P(E_2) + ... + P(E_n)}$
Or (indépendance des tirages), $P(E_1) = P(\overline{N_1}) \times P(N_2) \times ... \times P(N_n) = \frac{1}{2^n}$
De même pour $P(E_2)$, $P(E_3)$..., $P(E_n)$ (on fait toujours la même multiplication avec une série de $\frac{1}{2}$)
On a donc $P(E) = \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n} + ... + \frac{1}{2^n}$ (addition du même terme n fois)
Donc $\boxed{P(E) = \frac{n}{2^n}}$

1)c) $A \cap B$ est en fait l'événement : " on obtient exactement une boule blanche ". *(Que veut dire avoir simultanément A et B ici...)*
$A \cap B$ correspond donc à l'événement que nous avons appelé E précédemment. D'où : $\boxed{P(A \cap B) = \frac{n}{2^n}}$.
A est l'événement contraire à celui que nous avions appelé C. Donc $A = \overline{C}$.
Donc $P(A) = 1 - P(C)$. Donc $\boxed{P(A) = 1 - \frac{1}{2^{n-1}}}$
L'événement B "on obtient au plus une blanche" peut se décomposer en "on obtient zéro blanche ou on obtient exactement une blanche".
L'événement "on obtient zéro blanche" est $N_1 \cap N_2 \cap ... \cap N_n$. L'événement "on obtient exactement une blanche" est E. Leur intersection est évidemment vide. On a donc $P(B) = P(N_1 \cap N_2 \cap ... \cap N_n) + P(E) = \frac{1}{2^n} + \frac{n}{2^n}$
(Rappelez-vous qu'on avait calculé $P(N_1 \cap N_2 \cap ... \cap N_n)$ dans la 1)a))
Donc $\boxed{P(B) = \frac{n+1}{2^n}}$

2) On a calculé $P(A \cap B)$, $P(A)$ et $P(B)$ à la question précédente.

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(A) \times P(B) \\ \iff \frac{n}{2^n} &= \left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right) \times \frac{n+1}{2^n} \\ \iff n &= \left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right) \times (n+1) \end{aligned}$$

J'ai éliminé le 2^n au dénominateur à droite et à gauche. C'est au moins ça de pris, mais comment arriver au résultat demandé ? Tout simplement en me disant qu'il me faut exprimer 2^{n-1} en fonction de n.

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(A) \times P(B) \\ \iff \frac{n}{n+1} &= 1 - \frac{1}{2^{n-1}} \\ \iff \frac{1}{2^{n-1}} &= 1 - \frac{n}{n+1} = \frac{n+1-n}{n+1} = \frac{1}{n+1} \\ \iff 2^{n-1} &= n+1 \end{aligned}$$

On a bien montré : $\boxed{P(A \cap B) = P(A) \times P(B) \iff 2^{n-1} = n+1}$

Oui mais, qu'est-ce que ça veut dire, déjà, $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$, en probabilités...

3) *Ils nous demandent de calculer, et bien calculons...*

$$\begin{aligned} u_2 &= 2^{2-1} - (2+1) = 2^1 - 3 = -1 \\ u_3 &= 2^{3-1} - (3+1) = 2^2 - 4 = 0 \\ u_4 &= 2^{4-1} - (4+1) = 2^3 - 5 = 3 \end{aligned}$$

Pour la stricte croissance de (u_n), je ne vois, a priori, rien de plus simple ici que la bonne vieille méthode.

$$\begin{aligned} \forall n \geq 2,\ u_{n+1} - u_n &= 2^n - (n+2) - 2^{n-1} + (n+1) \ \ \textit{(attention aux signes)} \\ &= 2^n - 2^{n-1} - 1 \\ &= 2^{n-1}(2-1) - 1 \ \ \textit{(petite factorisation sans oublier } 2^n = 2^{n-1} \times 2\textit{)} \\ &= 2^{n-1} - 1 \\ &\geq 2^{2-1} - 1 \ \ (n \geq 2, \textit{fonction puissance strictement croissante sur } \mathbb{R}_+^*) \\ \text{Donc } u_{n+1} - u_n &\geq 2^1 - 1 \\ \text{c'est-à-dire } u_{n+1} - u_n &\geq 1 > 0 \end{aligned}$$

Donc $\boxed{(u_n) \text{ est strictement croissante.}}$

4) *Répétons : qu'est-ce que ça veut dire, déjà, $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$, en probabilités... N'est-ce pas justement une caractérisation de l'indépendance de A et de B ?*
- D'accord, mais je ne vois pas le lien avec (u_n).
- Regarde mieux...

On a vu en 2) : $P(A \cap B) = P(A) \times P(B) \iff 2^{n-1} = n+1$
C'EST-A-DIRE : $P(A \cap B) = P(A) \times P(B) \iff 2^{n-1} - (n+1) = 0$

Autrement dit (*les majuscules ont dû réveiller les endormis*) :
$P(A \cap B) = P(A) \times P(B) \iff u_n = 0$

Les valeurs de n pour lesquelles A et B sont indépendants sont donc exactement les valeurs de n pour lesquelles $u_n = 0$.

Or, on a vu, $u_2 \neq 0$, $u_3 = 0$ et (u_n) strictement croissante. La stricte croissance de (u_n) implique : $\forall n > 3, u_n > u_3$ c'est-à-dire $u_n > 0$

La seule valeur de n pour laquelle u_n s'annule est donc 3.

Donc $\boxed{A \text{ et } B \text{ sont indépendants si et seulement si } n = 3.}$

www.ayoub-et-les-maths.com
ayoub.hajlaoui.scolaire@gmail.com