Urne, boules et jeu équitable

Ayoub Hajlaoui

Jeux du regret suprême et de l'argent ravi,
Vous faites des problèmes, en maths et dans la vie.

Énoncé :

On dispose de deux urnes U_1 et U_2 contenant des boules indiscernables au toucher. U_1 contient k boules blanches ($k \geq 1$) et 3 boules noires. U_2 contient 2 boules blanches et 1 boule noire.

On tire au hasard une boule de U_1 et on la place dans U_2. On tire, ensuite, une boule de U_2. L'ensemble de ces opérations constitue une épreuve.

On note B_1 (respectivement N_1) l'événement " on a tiré une boule blanche (respectivement noire) dans l'urne U_1. "

On note B_2 (respectivement N_2) l'événement " on a tiré une boule blanche (respectivement noire) dans l'urne U_2. "

1) Etablir un arbre de probabilités décrivant l'épreuve, et faisant figurer B_1, N_1, B_2, N_2.

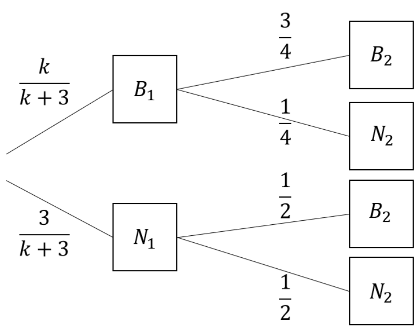
2) Un joueur mise 8 euros et effectue une épreuve. Si, à la fin de l'épreuve, le joueur tire une boule blanche de la deuxième urne, le joueur reçoit 12 euros. Sinon, il ne reçoit rien et perd sa mise. Soit X la variable aléatoire égale au gain du joueur, c'est-à-dire la différence entre la somme reçue et la mise.
a) Montrer que les valeurs possibles de X sont 4 et -8.
b) Déterminer, en fonction de k, la loi de probabilité de la variable X.
c) Déterminer, en fonction de k, l'espérance mathématique de X.

3) Dans cette question, $k = 12$. Un joueur participe 8 fois de suite à ce jeu. Au début de chaque épreuve, l'urne U_1 contient donc 12 boules blanches et 3 noires, et l'urne U_2 contient 2 boules blanches et 1 noire. Ainsi, les épreuves successives sont indépendantes.
Calculer la probabilité qu'à la fin de ces huit épreuves, le joueur ait gagné cinq fois 4 euros et perdu trois fois 8 euros (l'arrondir à $0,0001$ près).

4) k désigne de nouveau un entier naturel supérieur ou égal à 1. Combien de boules blanches doit contenir l'urne U_1 pour que le jeu soit équitable ?

Correction :

1) *Ne pas oublier que sur les branches de droite, on met les probabilités conditionnelles, c'est-à-dire $P_{B_1}(B_2)$, $P_{B_1}(N_2)$, $P_{N_1}(B_2)$, $P_{N_1}(B_2)$. Pour les calculer, il suffit de se poser les bonnes questions : si une boule blanche est tirée de l'urne* 1 *(événement B_1) ; que va-t-il se passer pour la composition de l'urne* 2 *etc...*



www.ayoub-et-les-maths.com
ayoub.hajlaoui.scolaire@gmail.com

2)a) D'après l'énoncé, il n'y a que deux issues possibles à l'épreuve : soit le joueur gagne, auquel cas il reçoit 12 euros, soit le joueur perd, auquel cas il ne reçoit rien et perd sa mise. Dans le premier cas, $X = 12 - 8$ et dans le second, $X = -8$ (en tenant compte de la mise de départ).

$\boxed{\text{Les valeurs possibles de } X \text{ sont donc 4 et } -8.}$

2)b) *Déterminer la loi de probabilité de X, c'est déterminer $P(X = -8)$ et $P(X = 4)$. Il faut donc calculer les probabilités que le joueur gagne et qu'il perde.*

D'après l'énoncé, la probabilité que le joueur gagne est $P(B_2)$ (et celle qu'il perde est $P(N_2) = 1 - P(B_2)$).

$$\begin{aligned}
P(B_2) &= P(B_2 \cap B_1) + P(B_2 \cap N_1) \text{ (formule des probabilités totales)} \\
&= P(B_1) \times P_{B_1}(B_2) + P(N_1) \times P_{N_1}(B_2) \text{ (déf. probas conditionnelles)} \\
&= \frac{k}{k+3} \times \frac{3}{4} + \frac{3}{k+3} \times \frac{1}{2} \\
&= \frac{3k+6}{4(k+3)} \textit{ (pas de panique, on a juste mis au même dénominateur)}
\end{aligned}$$

Donc $\boxed{P(X = 4) = \frac{3k+6}{4k+12} \text{ et } P(X = -8) = 1 - \frac{3k+6}{4k+12} = \frac{k+6}{4k+12}}$

2)c) L'espérance mathématique $E(X)$ de X est donc :

$$\begin{aligned}
E(X) &= 4 \times P(X = 4) + (-8) \times P(X = -8) \\
&= 4 \times \frac{3k+6}{4k+12} - 8 \times \frac{k+6}{4k+12} \\
&= \frac{3k+6}{k+3} - \frac{2k+12}{k+3}
\end{aligned}$$

Donc $\boxed{E(X) = \frac{k-6}{k+3}}$

3) *Dans cette question, il ne s'agit plus d'une épreuve mais de 8 répétitions de cette épreuve. Répétitions indépendantes... Cela doit suffire pour nous mettre la puce à l'oreille.*

Chaque épreuve correspond à une expérience de Bernoulli (car deux issues possibles seulement), avec une probabilité de succès p :

$p = P(B_2) = \frac{3 \times 12 + 6}{4 \times 12 + 12} = \frac{42}{60} = \frac{7}{10} = 0.7$ (cf question 2b, en remplaçant k par 12)

Nous avons ici une répétition de 8 expériences de Bernoulli identiques et indépendantes. La variable aléatoire Y, comptant le nombre de succès sur ces 8 expériences, suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 8$ et $p = 0.7$.

L'énoncé nous demande de calculer $P(Y = 5)$ *(cinq gains, trois pertes)*

$P(Y = 5) = \binom{n}{5} p^5 (1-p)^{n-5} = \binom{8}{5} 0.7^5 (1 - 0.7)^{8-5} = 56 \times 0.7^5 \times 0.3^3$

$\boxed{P(Y = 5) \simeq 0.2541}$

4) Pour que le jeu soit équitable, l'espérance du gain X doit être nulle (en moyenne, le joueur ne perd ni ne gagne).

Reprenons l'expression de l'espérance obtenue en 2c :

$E(X) = \frac{k-6}{k+3}$

$E(X) = 0 \Leftrightarrow \frac{k-6}{k+3} = 0 \Leftrightarrow k - 6 = 0 \Leftrightarrow k = 6$

$\boxed{\text{L'urne } U_1 \text{ doit donc contenir 6 boules blanches}}$ pour que le jeu soit équitable.

www.ayoub-et-les-maths.com
ayoub.hajlaoui.scolaire@gmail.com