Utilisations judicieuses du Théorème des Accroissements Finis (TAF)

Ayoub Hajlaoui

Rappelez-vous, le titre donné en TD à cet exercice était "Steve avait un bon Job." Jeu de mot admirable, s'il en est, d'un chargé de TD profitant outrageusement de sa position pour écouler des calembours qui seraient socialement inacceptables par ailleurs.

L'autre intérêt de ce titre, c'est qu'il s'agissait d'un clin d'oeil indiquant la méthode à utiliser pour résoudre l'exercice. Qui dit job dit TAF... Mais la question qui subsiste, et à laquelle je vais tenter de répondre, est la suivante : sachant qu'un exercice de partiel est peu susceptible de s'intituler "Steve avait un bon Job", comment pouvons-nous avoir l'intuition du théorème à utiliser sans de telles indications extratextuelles ?

Enoncé :

1) Déterminer la limite en $+\infty$ de la fonction $f : x \to (x+1)e^{\frac{1}{x+1}} - xe^{\frac{1}{x}}$

2) Soit la suite u définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_n = \sqrt[n]{n}$.

a) Montrer que (u_n) est décroissante à partir d'un certain rang.
b) Montrer que (u_n) est minorée par 1.
c) Montrer que (u_n) converge vers 1.

Correction :

1) *Naïvement, on commencerait par ce qu'il y a de plus simple, à savoir regarder si cette limite est calculable facilement ou si l'on a affaire à une forme indéterminée. On remarque rapidement qu'on tombe sur une forme du style* $(+\infty) - (+\infty)$. *Comment lever l'indétermination ?*

Remarquez que l'expression la fonction f *met en jeu une différence entre deux termes,* $(x+1)e^{\frac{1}{x+1}}$ *et* $xe^{\frac{1}{x}}$. *Qu'ont-ils en commun ? Peut-on les factoriser facilement ? A première vue, non. Mais alors pourquoi ai-je l'impression qu'ils se ressemblent ?*

Ils se ressemblent, et pas qu'un peu. La seule différence, c'est que dans le premier terme, $x+1$ *remplace le* x *du second terme...*

Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on peut écrire $f(x) = g(x+1) - g(x)$ avec $g(x) = xe^{\frac{1}{x}}$. g est bien définie sur $\mathbb{R}^*$ *(même* $\mathbb{R}_+^*$ *nous suffit parce que nous regardons la limite en* $+\infty$*)*

En quoi cela m'avance-t-il ? Si seulement je pouvais faire un petit effort de pensée, je pourrais voir $g(x+1) - g(x)$ *comme un taux d'accroissement. "Mais ce n'est pas un quotient", dites-vous ? Remarquez que* $(x+1) - x = 1$

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, f(x) = g(x+1) - g(x) = \frac{g(x+1) - g(x)}{1} = \frac{g(x+1) - g(x)}{(x+1) - x}$$

Le voilà, votre taux d'accroissement. Et maintenant, si je vous dis "TAF", vous n'aurez pas l'impression d'un parachutage étrange...

g est continue et dérivable sur $\mathbb{R}^*$ (cf composée et produit de fonctions continues et dérivables).

Donc pour tout $x > 0$, g est continue sur $[x\ ;\ x+1]$ et dérivable sur $]x\ ;\ x+1[$. *Les hypothèses du TAF sont donc bien vérifiées.*

Pour tout $x > 0$, en appliquant le théorème des accroissements finis pour la fonction g sur $]x\ ;\ x+1[$, on obtient :

$$\exists c \in]x\ ;\ x+1[,\ \ g'(c) = \frac{g(x+1) - g(x)}{(x+1) - x} = f(x) \qquad (*)$$

Calculons la dérivée g' de g :

$$\forall t > 0,\ \ g'(t) = e^{\frac{1}{t}} + t \times (-\frac{1}{t^2}) \times e^{\frac{1}{t}} = e^{\frac{1}{t}} - \frac{1}{t} \times e^{\frac{1}{t}} = e^{\frac{1}{t}}(1 - \frac{1}{t})$$

En reprenant (*), on a alors :

$$\forall x > 0,\ \ \exists c \in]x\ ;\ x+1[,\ \ e^{\frac{1}{c}}(1 - \frac{1}{c}) = f(x)$$

Après ces quelques calculs, ce qu'il ne faut surtout pas, c'est que vous oubliiez où nous nous situons par rapport à la réponse finale que nous devons apporter. Il fallait calculer la limite de f en $+\infty$. A condition que nous ne l'ayons pas oublié, nous sommes tout prêts du but.

$x < c < x+1$. Donc lorsque x tend vers $+\infty$, c aussi tend vers $+\infty$. Or $\lim_{c\to+\infty} e^{\frac{1}{c}}(1 - \frac{1}{c}) = 1$ (par théorème d'opérations sur les limites, sachant que $\lim_{c\to+\infty} \frac{1}{c} = 0$ et $\lim_{c\to+\infty} e^{\frac{1}{c}} = 1$)

On en conclut donc : $\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1}$

2)a) *Pareil, on commence par réfléchir aux choses les plus simples. Lorsqu'on me demande de montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante à partir d'un certain rang, je veux prouver que pour tout entier n à partir d'un certain rang, $u_{n+1} - u_n \leq 0$.*
Mais $u_{n+1} - u_n = \sqrt[n+1]{n+1} - \sqrt[n]{n} = (n+1)^{\frac{1}{n+1}} - n^{\frac{1}{n}}$, et, à première vue, je ne sais pas quoi dire du signe de cette chose... Par contre, si j'ai le même réflexe qu'en 1), je peux écrire ce qui suit :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ u_{n+1} - u_n = (n+1)^{\frac{1}{n+1}} - n^{\frac{1}{n}} = g(n+1) - g(n) = \frac{g(n+1) - g(n)}{(n+1) - n}$$

en posant $g(x) = x^{\frac{1}{x}} = \exp(\frac{1}{x}\ln(x))$. g est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus, g est continue et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ (cf composée de fonctions dérivables)

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, g est bien continue sur $[n\ ;\ n+1]$ et dérivable sur $]n\ ;\ n+1[$.

Donc d'après le théorème des accroissements finis,

$$\exists c \in]n\ ;\ n+1[,\ \ g'(c) = \frac{g(n+1) - g(n)}{(n+1) - n} = u_{n+1} - u_n$$

Calculons la dérivée g' de g :

$$\forall x > 0,\ \ g'(x) = (\frac{1}{x}\ln(x))' \times \exp(\frac{1}{x}\ln(x)) = (-\frac{1}{x^2}\ln(x) + \frac{1}{x} \times \frac{1}{x}) \times \exp(\frac{1}{x}\ln(x))$$

Donc :

$$\forall x > 0,\ \ g'(x) = \frac{1}{x^2}(1 - \ln(x)) \times \exp(\frac{1}{x}\ln(x))$$

On a donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ \exists c \in]n\ ;\ n+1[,\ \ u_{n+1} - u_n = \ \frac{1}{c^2}(1 - \ln(c)) \times \exp(\frac{1}{c}\ln(c))$$

Qu'est-ce qui nous intéresse dans cette expression ? Son signe, pour savoir qui de u_{n+1} ou de u_n est le plus grand.

$\frac{1}{c^2}(1-\ln(c))\times\exp\left(\frac{1}{c}\ln(c)\right)$ est du signe de $1-\ln(c)$ (car une exponentielle et un carré sont toujours positifs). Pour c assez grand, $1-\ln(c)<0$

Pour c assez grand ? Oui. Si $c>e$, $ln(c)>ln(e)=1$ par croissance de la fonction ln. Et n'oublions pas que e est compris entre 2 et 3

Soit $n\geq 3$.
$n<c<n+1$ donc $c>3$ et donc $\ln(c)>1$ (et donc $1-\ln(c)<0$)
On a donc $u_{n+1}-u_n<0$

$\boxed{(u_n) \text{ est donc décroissante à partir du rang 3}}$

2)b) $\forall n\in\mathbb{N}^*, u_n=\exp\left(\frac{1}{n}\ln(n)\right)\geq\exp\left(\frac{1}{n}\ln(1)\right)$ (cf croissance des fonctions logarithme et exponentielle)
Or $\exp\left(\frac{1}{n}\ln(1)\right)=e^0=1$
Donc $\forall n\in\mathbb{N}^*, u_n\geq 1$. Autrement dit, $\boxed{\text{la suite } u \text{ est minorée par 1.}}$

2)c) (u_n) est décroissante à partir d'un certain rang (cf question 2)a)) et minorée par 1 (cf question 2)b)). Donc (u_n) est convergente.

Attention à ceux qui voudraient en conclure directement que (u_n) converge vers 1... Arrivés là, il serait dommage de tout gâcher avec une bêtise. Par contre, sait que (u_n) converge et que sa limite l est supérieure ou égale à 1.

Posons l la limite de la suite u. Comme u est minorée par 1, $l\geq 1$.

Rappelons-nous que $u_n=\exp\left(\frac{1}{n}ln(n)\right)$. Peut-être qu'en faisant "disparaître" la fonction exponentielle par un logarithme...

$u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$ donc $\ln(u_n)\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\ln(l)$ par continuité de la fonction ln sur $\mathbb{R}_+^*$
Or $\ln(u_n)=\frac{1}{n}\ln(n)$ donc (cf croissances comparées) $\ln(u_n)\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$
Par continuité de la fonction exponentielle, $\exp(\ln(u_n))\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}e^0=1$

Et $\exp(ln(u_n))$, c'est qui au juste ?...

On a donc montré $\boxed{u_n\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}1}$

www.ayoub-et-les-maths.com
ayoub.hajlaoui.scolaire@gmail.com