Étude de la suite de Fibonacci

Ayoub Hajlaoui

" D'une lourdeur de plomb, la suite nous endort...
Mais si nous transformions l'éclat du plomb en or ? "

Énoncé :

Soit (f_n) la suite réelle définie par $f_0 = 0$, $f_1 = 1$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\; f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$
1) Calculer f_n en fonction de n.
2) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}, f_{n+1}^2 - f_n f_{n+2} = (-1)^n$
3) Etablir que $(\frac{f_{n+1}}{f_n})_{n\geq 1}$ converge, en précisant sa limite.

Correction :

1) *Ici, la réflexion est presque bannie. C'est une suite récurrente linéaire d'ordre 2, et nous savons cuisiner les suites récurrentes linéaires d'ordre 2. Bon, d'accord, c'est f (comme Fibonacci) et pas u, mais rien de bien effrayant pour nous.*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \;\; f_{n+2} - f_{n+1} - f_n = 0$$

$\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-1) = 5 > 0$
Donc le terme général de cette suite s'écrit $f_n = \lambda_1 r_1^n + \lambda_2 r_2^n$ avec $r_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, $\; r_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. λ_1 et λ_2 sont deux réels à déterminer grâce aux premiers termes f_0 et f_1. En effet, comme $f_0 = 0$ et $f_1 = 1$:

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 & = 0 \\ \lambda_1 \times \frac{1-\sqrt{5}}{2} + \lambda_2 \times \frac{1+\sqrt{5}}{2} & = 1 \end{cases}$$

c-à-d

$$\begin{cases} \lambda_1 & = -\lambda_2 \\ \lambda_2(-\frac{1-\sqrt{5}}{2} + \frac{1+\sqrt{5}}{2}) = & 1 \end{cases}$$

c-à-d

$$\begin{cases} \lambda_1 & = -\lambda_2 \\ \sqrt{5}\lambda_2 = & 1 \end{cases}$$

Donc $\lambda_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$ et $\lambda_1 = -\frac{1}{\sqrt{5}}$. Donc

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}[(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n]}$$

2) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}, f_{n+1}^2 - f_n f_{n+2} = (-1)^n$
On pressent bien qu'il va falloir utiliser la relation de récurrence $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$. On essaye des petits trucs du genre "multiplier les deux membres de cette égalité par f_n ou f_{n+1}" pour essayer d'obtenir ce qu'on cherche, sans y parvenir. Enfin, personnellement, je n'y suis pas parvenu, et si cette méthode a été couronnée de succès pour l'un d'entre vous, je serais curieux de savoir comment.

Bref, si cette méthode ne marche pas, et qu'on se retrouve dos au mur, on se dit que peut-être, une récurrence... Quel autre élément indique qu'une récurrence pourrait nous débloquer ? Le $(-1)^n$ à droite de l'équation à démontrer. Honnêtement, je ne vois pas comment on pourrait obtenir " naturellement " un tel $(-1)^n$, à moins justement d'utiliser un raisonnement par récurrence, qui nous montrerait des multiplications successives par -1. Va pour la récurrence, alors. C'est parti :

Soit la propriété P_n : « $f_{n+1}^2 - f_n f_{n+2} = (-1)^n$ »

Initialisation : $f_{0+1}^2 - f_0 f_{0+2} = f_1^2 - f_0 f_2 = 1^2 - 0 \times f_2 = 1$ et $(-1)^0 = 1$. Donc $f_{0+1}^2 - f_0 f_{0+2} = (-1)^0$, et donc P_0 est vraie.

Hérédité : Supposons P_n vraie pour un certain rang n (c-à-d supposons $f_{n+1}^2 - f_n f_{n+2} = (-1)^n$), et montrons que P_{n+1} est vraie (c-à-d montrons $f_{n+2}^2 - f_{n+1} f_{n+3} = (-1)^{n+1}$).
$f_{n+2}^2 - f_{n+1} f_{n+3} = f_{n+2}^2 - f_{n+1}(f_{n+2} + f_{n+1})$ en utilisant la relation de récurrence qui définit la suite (f_n).
On fait ainsi disparaître le terme f_{n+3}, le but étant pour nous d'utiliser l'hypothèse de récurrence, qui ne contient pas f_{n+3}.
Donc

$$\begin{aligned}
f_{n+2}^2 - f_{n+1} f_{n+3} &= f_{n+2}^2 - f_{n+1} f_{n+2} - f_{n+1}^2 \\
&= f_{n+2}^2 - f_{n+1} f_{n+2} - ((-1)^n + f_n f_{n+2}) \quad (\text{cf } P_n) \\
&= f_{n+2}^2 - f_{n+1} f_{n+2} + (-1)^{n+1} - f_n f_{n+2} \\
&= f_{n+2}^2 - f_{n+2}(f_{n+1} + f_n) + (-1)^{n+1} \\
&= f_{n+2}^2 - f_{n+2} \times f_{n+2} + (-1)^{n+1} \quad (\text{cf propriété de } (f_n)) \\
&= f_{n+2}^2 - f_{n+2}^2 + (-1)^{n+1} \\
&= (-1)^{n+1}
\end{aligned}$$

On a donc démontré P_{n+1} en partant de P_n.

Conclusion : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, f_{n+1}^2 - f_n f_{n+2} = (-1)^n} \quad (*)$

3) Etablir que $(\frac{f_{n+1}}{f_n})_{n \geq 1}$ converge, en précisant sa limite.

Appelons (u_n) cette suite, c-à-d : $\forall n > 0, u_n = \frac{f_{n+1}}{f_n}$. Comme (f_n) est croissante (pour obtenir un terme, on fait la somme des deux termes positifs précédents) et comme $f_1 = 1$, alors $\forall n \geq 1, f_n \geq 1 > 0$. Donc (u_n) est bien définie (on divise par des termes qui ne sont pas nuls).

Bien entendu, on pressent qu'il va falloir partir de $(*)$. Sinon, à quoi aurait servi cette question 2, et l'égalité bizarre qu'elle nous demandait de démontrer ? En partant de $(*)$, deux choses intelligentes peuvent nous traverser l'esprit. Diviser les deux membres de l'égalité par f_{n+1}^2, ou bien par f_n^2 (pour faire apparaître des termes de la suite (u_n)). J'ai essayé la première option et ça n'a pas marché, j'ai essayé la seconde et ça n'a pas marché. J'ai essayé de jouer avec $(*)$ comme j'ai pu, mais ça n'a toujours pas marché.

Peut-être dois-je donc revoir mon pressentiment de devoir utiliser la question 2, et revenir humblement à la question 1, c-à-d au terme général f_n, que nous avons déterminé grâce à la recette.

$$\begin{aligned}
\forall n \geq 1, \quad u_n &= \frac{r_2^{n+1} - r_1^{n+1}}{r_2^n - r_1^n} \quad (\text{cf question 1}) \\
&= \frac{r_2^{n+1}(1 - (\frac{r_1}{r_2})^{n+1})}{r_2^n(1 - (\frac{r_1}{r_2})^n)} \quad \textit{(On bidouille un peu...)}
\end{aligned}$$

Pourquoi ai-je factorisé ainsi ? Pourquoi par r_2 et pas par r_1 ? L'idée, c'est déjà de remarquer $[r_2| > |r_1|$, et du coup, $|\frac{r_1}{r_2}| < 1$...

$$u_n = r_2 \frac{1 - (\frac{r_1}{r_2})^{n+1}}{1 - (\frac{r_1}{r_2})^n} \quad \textit{(en simplifiant l'expression précédente)}$$

$|\frac{r_1}{r_2}| < 1$ donc $(\frac{r_1}{r_2})^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. D'où : $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} r_2$, c-à-d $\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1+\sqrt{5}}{2}}$

(communément appelé le nombre d'or, nombre qui fourre son nez à peu près partout en mathématiques ; et du coup, comme promis, nous avons bien transformé le plomb en or...)

www.ayoub-et-les-maths.com
ayoub.hajlaoui.scolaire@gmail.com