L'astuce trigonométrie-complexes

Ayoub Hajlaoui

" Apprêtez-vous à lire une brillante astuce
Pour pouvoir sans souffrir sommer des cosinus. "

Enoncé :

Etant donné $\rho \in]0,1[$ et $\theta \in \mathbb{R}$, on pose $U_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \rho^k \cos(k\theta)$. Etablir la convergence de (U_n) et en déduire sa limite.

Correction :

Au vu de l'expression de U_n, peut-on espérer un calcul de limite simple, direct ? Vous conviendrez que non. On peut essayer d'étudier le sens de variation de (U_n) (pour avoir "croissante majorée"=>"converge" ou "décroissante minorée"=>"converge"). Mais on voit $U_{n+1} - U_n = \sum_{k=0}^{n+1} \rho^k \cos(k\theta) - \sum_{k=0}^{n} \rho^k \cos(k\theta) = \rho^{n+1} \cos\big((n+1)\theta\big)$. A cause du cos, $U_{n+1} - U_n$ risque de changer de signe et (U_n) risque donc de ne pas être monotone (c'est-à-dire, de n'être ni croissante, ni décroissante).

Après force grattages de tête, on se rend compte que le ρ^k dans la somme lui donne des airs de somme de termes d'une suite géométrique. Malheureusement, $\cos(k\theta)$ gâche tout... Si seulement on pouvait se ramener à une puissance avec k comme exposant. Ah, mais il se trouve justement que...

$$\begin{aligned} \text{Par définition : } \forall\, \alpha \in \mathbb{R},\ e^{i\alpha} &= \cos(\alpha) + i\sin(\alpha) \\ \text{Donc } e^{ik\theta} &= \cos(k\theta) + i\sin(k\theta) \\ \text{Autrement dit, } \cos(k\theta) &= \mathfrak{Re}(e^{ik\theta}) \quad (\mathfrak{Re} \text{ désignant la partie réelle}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Donc : } \forall\, n \in \mathbb{N},\ U_n &= \sum_{k=0}^{n} \rho^k \cos(k\theta) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \rho^k \mathfrak{Re}(e^{ik\theta}) \\ &= \mathfrak{Re}\Big(\sum_{k=0}^{n} \rho^k e^{ik\theta}\Big) \quad (\text{par linéarité de la fonction } \mathfrak{Re}) \\ &= \mathfrak{Re}\Big(\sum_{k=0}^{n} (\rho e^{i\theta})^k\Big) \end{aligned}$$

$\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (\rho e^{i\theta})^k$ est la somme de termes consécutifs d'une suite géométrique. La raison de cette suite est $\rho e^{i\theta}$ et le premier terme de la somme est $(\rho e^{i\theta})^0 = 1$. Remarquons $|\rho e^{i\theta}| = |\rho||e^{i\theta}| = \rho < 1$. Donc $\rho e^{i\theta} \neq 1$ *(et on pourra donc appliquer sans souci la formule connue sur la somme des termes consécutifs d'une suite géométrique).*

$$\text{On a alors : } \sum_{k=0}^{n}(\rho e^{i\theta})^k = \frac{1-(\rho e^{i\theta})^{n+1}}{1-\rho e^{i\theta}} = \frac{1-\rho e^{i(n+1)\theta}}{1-\rho e^{i\theta}}$$

$$\text{Donc : } \forall\, n \in \mathbb{N},\ U_n = \mathfrak{Re}\Big(\frac{1-\rho e^{i(n+1)\theta}}{1-\rho e^{i\theta}}\Big)$$

Or, comme $|\rho e^{i\theta}| < 1$, on a alors $(\rho e^{i\theta})^{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

$$\text{Donc } \frac{1-\rho e^{i(n+1)\theta}}{1-\rho e^{i\theta}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{1-\rho e^{i\theta}}$$

$$\text{Par continuité de la fonction } \mathfrak{Re},\ \mathfrak{Re}\Big(\frac{1-\rho e^{i(n+1)\theta}}{1-\rho e^{i\theta}}\Big) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathfrak{Re}\Big(\frac{1}{1-\rho e^{i\theta}}\Big)$$

$$\text{Autrement dit, } U_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathfrak{Re}\Big(\frac{1}{1-\rho e^{i\theta}}\Big)$$

A-t-on fini ? Presque... Il serait judicieux, pour s'assurer tous les points, de donner une forme acceptable à la limite trouvée.

$$\begin{aligned}
\mathfrak{Re}\Big(\frac{1}{1-\rho e^{i\theta}}\Big) &= \mathfrak{Re}\Big(\frac{1}{1-\rho(\cos(\theta)+i\sin(\theta))}\Big)\\
&= \mathfrak{Re}\Big(\frac{1}{(1-\rho\cos(\theta))-i\rho\sin(\theta)}\Big)\\
&= \mathfrak{Re}\Big(\frac{(1-\rho\cos(\theta))+i\sin(\theta)}{(1-\rho\cos(\theta))^2+\rho^2\sin^2(\theta)}\Big)
\end{aligned}$$

On a multiplié en haut et en bas par le complexe conjugué du dénominateur (technique classique pour pouvoir écrire sous une forme simple $a+ib$ et extraire facilement la partie réelle)

$$\begin{aligned}
\text{Donc } \mathfrak{Re}\Big(\frac{1}{1-\rho e^{i\theta}}\Big) &= \mathfrak{Re}\Big(\frac{1-\rho\cos(\theta)}{(1-\rho\cos(\theta))^2+\rho^2\sin^2(\theta)} + i\frac{\sin(\theta)}{(1-\rho\cos(\theta))^2+\rho^2\sin^2(\theta)}\Big)\\
&= \frac{1-\rho\cos(\theta)}{(1-\rho\cos(\theta))^2+\rho^2\sin^2(\theta)}\\
&= \frac{1-\rho\cos(\theta)}{1-2\rho\cos(\theta)+\rho^2\cos^2(\theta)+\rho^2\sin^2(\theta)}\\
&= \frac{1-\rho\cos(\theta)}{1-2\rho\cos(\theta)+\rho^2(\cos^2(\theta)+\sin^2(\theta))}\\
&= \frac{1-\rho\cos(\theta)}{1-2\rho\cos(\theta)+\rho^2} \quad (\text{car } cos^2(\theta)+sin^2(\theta)=1)
\end{aligned}$$

$$\text{Pour conclure : } U_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1-\rho\cos(\theta)}{1-2\rho\cos(\theta)+\rho^2}$$

www.ayoub-et-les-maths.com
ayoub.hajlaoui.scolaire@gmail.com