Pourquoi il serait stupide de demander que l'on tienne compte de votre moyenne géométrique plutôt que de votre moyenne arithmétique

Ayoub Hajlaoui

En TD, le temps nous a manqué pour achever cet exercice. Certes, une poignée d'irréductibles est restée pendant la récréation pour assister à la botte finale. Nous contre une inégalité coriace. Il est temps de faire profiter le grand public de ce duel de haute volée, en rappelant aussi, par la même occasion, comment il a débuté. C'est en entraînant sa pointe qu'on l'aiguise pour le partiel. A vos plumes, donc.

Énoncé :

Soient $a_1, a_2 \in \mathbb{R}_+^*$.
1) Montrer que $\frac{a_1+a_2}{2} \geq \sqrt{a_1 a_2}$, avec égalité si et seulement si $a_1 = a_2$
2) Montrer par récurrence sur l'entier $n \geq 2$ que, pour tous $a_1, .., a_n \in \mathbb{R}_+^*$, on a $\frac{a_1+...+a_n}{n} \geq (a_1 \times ... \times a_n)^{\frac{1}{n}}$, avec égalité si et seulement si $a_1 = ... = a_n$
Indication : pour l'hérédité, on pourra considérer la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = \frac{a_1+...+a_n+x}{n+1} - (a_1 \times ... \times a_n \times x)^{\frac{1}{n+1}}$

Correction :

1) *On arrive devant cette inégalité à démontrer. Par quoi commencer ? Si l'on ne voit pas trop, deux options "basiques" s'offrent à nous :*
- élever séparément les deux membres au carré (comme ils sont tous les deux positifs, ça ne changera pas le sens de l'inégalité) et comparer ces carrés
- étudier le signe de la différence entre les deux membres
Les deux options peuvent nous faire aboutir au résultat. Si vous sentez ce qui va se passer, vous opterez pour la seconde. Sinon, au pire, la première option enlèvera la racine carrée si vous en avez la phobie. Comme je n'ai pas la phobie des racines carrées, et que je sens ce qui va se passer, j'opte pour la seconde option.

$$\frac{a_1+a_2}{2} - \sqrt{a_1 a_2} = \frac{a_1 + a_2 - 2\sqrt{a_1 a_2}}{2}$$

N'oublions pas que ce qui nous intéresse dans ce quotient, c'est uniquement son signe. Bon, 2 est positif.. Ce quotient est donc du signe de $a_1+a_2-2\sqrt{a_1a_2}$. Vous ne voyez rien ? Rien de remarquable ?

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 - 2\sqrt{a_1 a_2} &= (\sqrt{a_1})^2 + (\sqrt{a_2})^2 - 2\sqrt{a_1}\sqrt{a_2} \text{ (identité remarquable)} \\ &= (\sqrt{a_1} - \sqrt{a_2})^2 \geq 0 \text{ (cf carré)} \end{aligned}$$

Donc $a_1 + a_2 - 2\sqrt{a_1 a_2} \geq 0$, et donc $\frac{a_1+a_2}{2} - \sqrt{a_1 a_2} \geq 0$, c'est-à-dire $\boxed{\frac{a_1+a_2}{2} \geq \sqrt{a_1 a_2}}$

Le membre de gauche est la moyenne arithmétique, celui de droite est la moyenne géométrique. Etudions maintenant le cas d'égalité.

D'après ce qui précède, $\frac{a_1+a_2}{2} = \sqrt{a_1 a_2}$ si et seulement si $(\sqrt{a_1} - \sqrt{a_2})^2 = 0$, c-à-d si et seulement si $\sqrt{a_1} - \sqrt{a_2} = 0$, ce qui équivaut à $\sqrt{a_1} = \sqrt{a_2}$, et donc à $a_1 = a_2$. CQFD

2) *Il s'agit cette fois-ci de démontrer que la moyenne arithmétique est toujours supérieure à la moyenne géométrique dans le cas où on a plusieurs notes $a_1, ..., a_n$. L'énoncé est gentil, vu qu'il nous indique la voie à suivre. Pas de mystère, donc. Récurrence.*

(Pour rappel, $(a_1...a_n)^{\frac{1}{n}}$, c'est la même chose que $\sqrt[n]{a_1...a_n}$)

Montrons par récurrence sur n que pour tout entier $n \geq 2$, la propriété P_n :
"$\forall a_1, a_2 \in \mathbb{R}_+^*, \frac{a_1+...+a_n}{n} \geq (a_1...a_n)^{\frac{1}{n}}$, avec égalité si et seulement si $a_1 = ... = a_n$"

Initialisation : P_2 est vraie (cf question 1)

Hérédité : Supposons P_n vraie pour un certain rang $n \geq 2$

Soient $a_1, ...a_n, a_{n+1} \in \mathbb{R}_+^*$

L'énoncé est très gentil, vu qu'il nous donne une indication et à quel moment exact l'utiliser - en l'occurrence maintenant... Il nous dit de "considérer la fonction f". "Considérer", c'est un verbe un peu flou - et c'est peut-être pour ça qu'il est tant prisé dans les dissertations, mais ça, c'est une autre histoire. Regardons la fonction f. Elle ressemble grandement à ce que nous voudrions obtenir au rang $n+1$, sauf que la variable x remplace a_{n+1}.... Peut-être veut-on nous faire montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(x) \geq 0$... Un seul moyen de le savoir : étudier f. Dérivée, tout ça tout ça...

f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ (cf somme de fonctions dérivables).

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f(x) &= \frac{a_1 + ... + a_n + x}{n+1} - (a_1 \times ... \times a_n \times x)^{\frac{1}{n+1}} \\ &= \frac{a_1 + ... + a_n}{n+1} + \frac{x}{n+1} - (a_1 \times ... \times a_n)^{\frac{1}{n+1}} \times x^{\frac{1}{n+1}}\end{aligned}$$

Remarquez bien que dans l'expression de f, $a_1, ..., a_n$ sont des constantes.

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f'(x) &= \frac{1}{n+1} - (a_1 \times ... \times a_n)^{\frac{1}{n+1}} \times \frac{1}{n+1} x^{\frac{1}{n+1}-1} \\ &= \frac{1}{n+1} - (a_1 \times ... \times a_n)^{\frac{1}{n+1}} \times \frac{1}{n+1} x^{-\frac{n}{n+1}}\end{aligned}$$

Je veux dresser le tableau de signe de $f'(x)$ en fonction de x (pour avoir les variations d f), d'où mon désir de factoriser cette expression.

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f'(x) = \frac{1}{n+1}[1 - (a_1 \times ... \times a_n)^{\frac{1}{n+1}} \times x^{-\frac{n}{n+1}}]$$

$$\begin{aligned}\text{Donc } f'(x) \geq 0 &\Leftrightarrow 1 - (a_1 \times ... \times a_n)^{\frac{1}{n+1}} \times x^{-\frac{n}{n+1}} \geq 0 \\ &\Leftrightarrow 1 \geq (a_1 \times ... \times a_n)^{\frac{1}{n+1}} \times x^{-\frac{n}{n+1}} \\ &\Leftrightarrow 1 \times x^{\frac{n}{n+1}} \geq (a_1 \times ... \times a_n)^{\frac{1}{n+1}} \\ &\Leftrightarrow x^{\frac{n}{n+1}} \geq (a_1 \times ... \times a_n)^{\frac{1}{n+1}} \\ &\Leftrightarrow (x^{\frac{n}{n+1}})^{\frac{n+1}{n}} \geq ((a_1 \times ... \times a_n)^{\frac{1}{n+1}})^{\frac{n+1}{n}} \quad (\text{cf } x \to x^{\alpha} \text{ croissante si } \alpha > 0) \\ &\Leftrightarrow x \geq (a_1 \times ... \times a_n)^{\frac{1}{n}}\end{aligned}$$

L'intérêt d'avoir raisonné par équivalences, c'est qu'on sait non seulement quand $f'(x) \geq 0$, à savoir $x \geq (a_1 \times ... \times a_n)^{\frac{1}{n}}$, mais aussi quand $f'(x) < 0$ ($x < (a_1 \times ... \times a_n)^{\frac{1}{n}}$).

C'est bien mieux que ce réflexe inefficace qui consiste à vouloir résoudre l'équation $f'(x) = 0$, et ensuite à se casser la tête pour savoir de quel côté c'est positif et de quel côté c'est négatif...

On obtient le tableau de variation suivant pour f :

x	0		$(a_1 \times \cdots \times a_n)^{\frac{1}{n}}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$	$f\left((a_1 \times \cdots \times a_n)^{\frac{1}{n}}\right)$	$\nearrow$	

On voit donc que f admet un minimum en $(a_1 \times ... \times a_n)^{\frac{1}{n}}$

Si seulement ce minimum était positif ou nul... Cela démontrerait que f est positive sur $\mathbb{R}_+^*$. Autrement dit, qu'en prenant n'importe quel $x \in \mathbb{R}_+^*$ (et tiens, pourquoi pas $x = a_{n+1}$...), $f(x)$ serait positif.

$$f((a_1 \times ... \times a_n)^{\frac{1}{n}}) = \frac{a_1 + ... + a_n + (a_1 \times ... \times a_n)^{\frac{1}{n}}}{n+1} - [a_1 \times ... \times a_n \times (a_1 \times ... \times a_n)^{\frac{1}{n}}]^{\frac{1}{n+1}}$$

Aïe aïe aïe, tout cela est bien moche... Ou pas.
A droite, je vois un $(a_1 \times ... \times a_n)^{\frac{1}{n}}$ qui se répète...

$$\begin{aligned}
f((a_1 \times ... \times a_n)^{\frac{1}{n}}) &= \frac{a_1 + ... + a_n + (a_1 \times ... \times a_n)^{\frac{1}{n}}}{n+1} - [(a_1 \times ... \times a_n) \times (a_1 \times ... \times a_n)^{\frac{1}{n}}]^{\frac{1}{n+1}} \\
&= \frac{a_1 + ... + a_n + (a_1 \times ... \times a_n)^{\frac{1}{n}}}{n+1} - ((a_1 \times ... \times a_n)^{1+\frac{1}{n}})^{\frac{1}{n+1}} \\
&= \frac{a_1 + ... + a_n + (a_1 \times ... \times a_n)^{\frac{1}{n}}}{n+1} - ((a_1 \times ... \times a_n)^{\frac{n+1}{n}})^{\frac{1}{n+1}} \\
&= \frac{a_1 + ... + a_n + (a_1 \times ... \times a_n)^{\frac{1}{n}}}{n+1} - (a_1 \times ... \times a_n)^{\frac{1}{n}}
\end{aligned}$$

Ah mais c'est beaucoup plus sympa ! Maintenant, je vois que ce même terme $(a_1 \times ... \times a_n)^{\frac{1}{n}}$ se retrouve des deux côtés de cette soustraction...

$$\begin{aligned}
f((a_1 \times ... \times a_n)^{\frac{1}{n}}) &= \frac{a_1 + ... + a_n}{n+1} + \frac{(a_1 \times ... \times a_n)^{\frac{1}{n}}}{n+1} - (a_1 \times ... \times a_n)^{\frac{1}{n}} \\
&= \frac{a_1 + ... + a_n}{n+1} + (a_1 \times ... \times a_n)^{\frac{1}{n}}(\frac{1}{n+1} - 1) \\
&= \frac{a_1 + ... + a_n}{n+1} + (a_1 \times ... \times a_n)^{\frac{1}{n}}(\frac{1}{n+1} - \frac{n+1}{n+1}) \\
&= \frac{a_1 + ... + a_n}{n+1} - (a_1 \times ... \times a_n)^{\frac{1}{n}} \times \frac{n}{n+1}
\end{aligned}$$

Arrivés ici, on a fait le plus dur... On n'a pas encore utilisé l'hypothèse de récurrence P_n. (Si si, vous vous rappelez, on est toujours dans l'hérédité d'une récurrence en fait...) Pour pouvoir utiliser cette hypothèse, j'aimerais faire apparaître $\frac{a_1+...+a_n}{n}$. Fastoche !

$$f((a_1 \times ... \times a_n)^{\frac{1}{n}}) = \frac{a_1 + ... + a_n}{n} \times \frac{n}{n+1} - (a_1 \times ... \times a_n)^{\frac{1}{n}} \times \frac{n}{n+1}$$

Ca tombe à pic ! On peut maintenant factoriser par $\frac{n}{n+1}$:

$$f((a_1 \times ... \times a_n)^{\frac{1}{n}}) = \frac{n}{n+1}(\frac{a_1 + ... + a_n}{n} - (a_1 \times ... \times a_n)^{\frac{1}{n}})$$

Ooooh, et comme par hasard, on voit apparaître, sous nos yeux ébahis, l'hypothèse de récurrence... Ou plutôt comment l'utiliser...

Puisque P_n est vraie, on a $\frac{a_1+...+a_n}{n} - (a_1 \times ... \times a_n)^{\frac{1}{n}} \geq 0$

Donc le minimum $f((a_1 \times ... \times a_n)^{\frac{1}{n}})$ de f est positif.

Et donc $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f(x) \geq 0$.

$a_{n+1} \in \mathbb{R}_+^*$ donc $f(a_{n+1}) \geq 0$.

Autrement dit, $\frac{a_1+...+a_n+a_{n+1}}{n+1} - (a_1 \times ... \times a_n \times a_{n+1})^{\frac{1}{n+1}} \geq 0$

C'est bien l'inégalité qu'il fallait montrer pour P_{n+1} ? On a donc fini ? Non, il reste juste à étudier le cas d'égalité.

D'après la dernière égalité,

$$\begin{aligned} f((a_1 \times ... \times a_n)^{\frac{1}{n}}) = 0 &\Leftrightarrow \frac{a_1 + ... + a_n}{n} - (a_1 \times ... \times a_n)^{\frac{1}{n}} = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{a_1 + ... + a_n}{n} = (a_1 \times ... \times a_n)^{\frac{1}{n}} \\ &\Leftrightarrow a_1 = ... = a_n \ \text{ (cf } P_n) \end{aligned}$$

f étant strictement décroissante sur $]0; (a_1 \times ... \times a_n)^{\frac{1}{n}}]$ et strictement croissante sur $[(a_1 \times ... \times a_n)^{\frac{1}{n}}; +\infty[$, le seul moyen d'avoir $f(a_{n+1}) = 0$ est d'avoir $a_{n+1} = (a_1 \times ... \times a_n)^{\frac{1}{n}}$, avec $a_1 = ... = a_n$

Donc dans ce cas, $a_{n+1} = (a_1 \times ... \times a_1)^{\frac{1}{n}} = ((a_n)^n)^{\frac{1}{n}} = a_n$

On a donc bien démontré $\frac{a_1+...+a_n+a_{n+1}}{n+1} - (a_1 \times ... \times a_n \times a_{n+1})^{\frac{1}{n+1}} \geq 0$ avec égalité si et seulement si $a_1 = ... = a_n = a_{n+1}$

Donc P_{n+1} est vraie.

Conclusion : Le principe de raisonnement par récurrence nous permet de conclure :

$$\boxed{\forall n \geq 2,\ \forall a_1, .., a_n \in \mathbb{R}_+^*, \frac{a_1+...+a_n}{n} \geq (a_1 \times ... \times a_n)^{\frac{1}{n}} \text{ avec égalité si et seulement si } a_1 = ... = a_n}$$

Je peux enfin souffler, et remettre ma plume dans son fourreau.

www.ayoub-et-les-maths.com
ayoub.hajlaoui.scolaire@gmail.com