Suite d'intégrales 1

Ayoub Hajlaoui

Le nom du fichier (suite d'intégrales 1) préfigure d'autres corrigés sur des exercices du même style. S'il devait advenir que ce soit le dernier, vous ne viendrez pas m'embêter en arguant de l'inutilité du chiffre 1. "Pourquoi avoir mis 1 alors que c'était le seul ?" Je vous répondrais alors avec l'exemple de François 1er, qui a gardé son numéro 1 dans l'Histoire sans qu'il n'ait été suivi d'un François II. Une petite vérification sur Wikipédia pour me rendre compte que j'ai tort. François II a bien existé, et il a régné un peu plus d'un an...

Laissons l'Histoire tranquille, et revenons à notre suite d'intégrales.

Énoncé :

On considère la suite définie par $u_n = \int_0^1 t^n e^t dt$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

1) Calculer u_0.

2) Montrer que u est une suite positive décroissante.

3) A l'aide d'une Intégration Par Parties (IPP), établir une relation de récurrence pour (u_n).

4) Montrer que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

Correction :

1) *Ici, il n'y a pas vraiment à réfléchir. Remplaçons n par* 0 *dans l'expression de u_n, sans que le symbole $\int$ ne nous trouble de quelque manière que ce soit.*

$u_0 = \int_0^1 t^0 e^t dt = \int_0^1 e^t dt = [e^t]_0^1 = e^1 - e^0 = \boxed{\text{e - 1}}$

2) *Pour la positivité, rien de bien difficile. Cependant, il faut soigner la rédaction, en mettant bien $\forall$ n avant $\forall$ t.*

$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in [0; 1], t^n e^t \geq 0$. On a donc $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 0$, comme intégrale d'une fonction positive. *Mini-subtilité : l'intégrale d'une fonction positive est-elle positive ? Oui dans le cas où les bornes d'intégration ne sont pas inversées. Si j'intègre la fonction identité de 3 à 2, j'obtiens $\int_3^2 x dx < 0$. Dans notre cas, ainsi que dans l'extrême majorité des exercices non vicieux, on n'a pas ce (mini-)problème. Intéressons-nous maintenant à la décroissance de (u_n).*

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n &= \int_0^1 t^{n+1} e^t dt - \int_0^1 t^n e^t dt \\ &= \int_0^1 (t^{n+1} e^t - t^n e^t) dt \quad \text{(cf linéarité de l'intégration)} \\ &= \int_0^1 t^n e^t (t-1) dt\end{aligned}$$

$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in [0; 1], t^n e^t \geq 0$ et $t-1 \leq 0$ (car $t \leq 1$) donc $t^n e^t (t-1) \leq 0$. On en conclut $\int_0^1 t^n e^t (t-1) dt \leq 0$, c-à-d $u_{n+1} - u_n \leq 0$.

$\boxed{\text{Donc } (u_n) \text{ est une suite décroissante.}}$

3) *Ils nous demandent une relation de récurrence pour* (u_n). *On va donc essayer d'exprimer* u_{n+1} *en fonction de* u_n. *A priori, on ne sait pas si cela va suffire. Peut-être que la relation de récurrence qu'ils nous demandent de trouver est double (récurrence d'ordre 2). Mais notre flair mathématique nous rassure : ça ne devrait pas être le cas.*

Pourquoi ? Parce qu'en faisant une IPP, on passera d'un terme en t^n *à un terme en* t^{n+1} *(ou en* t^{n-1}*, en fonction du sens de dérivation choisi). Et comme ils nous demandent une IPP simple et pas une IPP double, il ne devrait y avoir que deux rangs mis en jeu. Trêve de bavardage, et faisons-la, cette IPP.*

$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \int_0^1 t^{n+1} e^t dt$.

Bon, dans les IPP, on a l'habitude de poser u, v, u', v'*, mais là, comme le nom* u *est déjà pris, évitons les confusions et appelons nos fonctions* a *et* b*. On veut se ramener à* u_n*, donc dérivons* $t \to t^{n+1}$ *pour obtenir un terme en* t^n *(et du coup, intégrons* $t \to e^t$*)*

Posons $a(t) = t^{n+1}$ et donc $a'(t) = (n+1)t^n$
$b'(t) = e^t$ et $b(t) = e^t$. (a et b sont bien C^1 sur $[0; 1]$)
$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \int_0^1 a(t)b'(t)dt = [a(t)b(t)]_0^1 - \int_0^1 a'(t)b(t)$. Autrement dit :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} &= [t^{n+1}e^t]_0^1 - \int_0^1 (n+1)t^n e^t dt \\ &= e - (n+1)\int_0^1 t^n e^t dt \quad \textit{(je sors la constante)} \end{aligned}$$

$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = e - (n+1)u_n}$

4) *Ils nous demandent de montrer que* (u_n) *converge vers 0. Avez-vous du flair ? Si oui, vous avez senti que nous avons indirectement prouvé, par ce que nous avons déjà fait, que* (u_n) *converge. Sinon, je vous invite à vous rattraper en regardant les questions précédentes.*
...
C'est bon ? Vous avez donc dû voir qu'à la question 2, nous avions montré que la suite (u_n) *était décroissante et positive (c-à-d, minorée par 0)...*

D'après la question 2, (u_n) est décroissante minorée par 0. Donc (u_n) converge vers une certaine limite $l \in \mathbb{R}$.

Il s'agira maintenant de montrer que l *est en fait* 0*. On sent bien qu'il va falloir utiliser la relation de récurrence de la question 3. Sur notre brouillon, en faisant tendre* n *vers* $+\infty$ *dans les deux membres du résultat de 3, on se rend compte que* $u_{n+1} \longrightarrow l$*, mais pour* $e - (n+1)l$*, on est un petit peu embêtés. La limite sera différente en fonction de la valeur de* l*...*

On sait que la suite (u_n) est positive, donc sa limite l vérifie $l \geq 0$. Supposons (en vue d'un raisonnement par l'absurde) : $l > 0$.
Reprenons la relation de récurrence obtenue grâce à la question 3.
$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = e - (n+1)u_n$
D'une part, $u_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$
D'autre part, $e - (n+1)u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$ (car $u_n \longrightarrow l > 0$ et $(n+1) \longrightarrow +\infty$)
Par unicité de la limite, on a alors $l = -\infty$, ce qui est absurde vu ce que nous avons supposé.
On en conclut que notre supposition "$l > 0$" était erronée *(pour notre plus grand bonheur)*. Donc $l = 0$. Conclusion : $\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0}$

www.ayoub-et-les-maths.com
ayoub.hajlaoui.scolaire@gmail.com