Croissances comparées et intégrales 1

Ayoub Hajlaoui

Ils voient dans chaque étoile un récit de leurs mythes,
Je vois dans l'intégrale un calcul de limite.

Énoncé : (temps conseillé : 25 min)

Le but de cet exercice est de démontrer $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$ en utilisant des intégrales.

On note f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{e^x}{x}$

1) Déterminer f', la dérivée de la fonction f sur $]0;+\infty[$

2) Justifier que pour tout réel $x \geq 1$, $f(x) = e + \displaystyle\int_1^x \frac{e^t(t-1)}{t^2}\,\mathrm{d}t$

3) En déduire que pour tout réel $x \geq 1$, $f(x) \geq e + e\left(\ln(x) + \dfrac{1}{x} - 1\right)$

4) Conclure.

Correction :

1) f est dérivable sur $]0;+\infty[$ en tant que quotient de fonctions dérivables (le dénominateur ne s'annulant pas).

$\forall x \in]0;+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{e^x \times x - e^x \times 1}{x^2}$ donc $\boxed{f'(x) = \dfrac{e^x(x-1)}{x^2}}$

2) *Dans le membre de droite de l'égalité qu'on nous demande de prouver, il faut savoir reconnaître la dérivée f'...*

$\forall x \geq 1$, $\displaystyle\int_1^x \frac{e^t(t-1)}{t^2}\,\mathrm{d}t = \int_1^x f'(t)\,\mathrm{d}t$. *Et on connait évidemment une primitive de f'...*

$\forall x \geq 1$, $\displaystyle\int_1^x \frac{e^t(t-1)}{t^2}\,\mathrm{d}t = \big[f(t)\big]_1^x = f(x) - f(1) = f(x) - \frac{e^1}{1} = f(x) - e$

On a prouvé : $\forall x \geq 1$, $\displaystyle\int_1^x \frac{e^t(t-1)}{t^2}\,\mathrm{d}t = f(x) - e$

Autrement dit : $\boxed{\forall x \geq 1,\ f(x) = e + \displaystyle\int_1^x \frac{e^t(t-1)}{t^2}\,\mathrm{d}t}$

3) *L'inégalité qu'on nous demande de prouver revient à minorer l'intégrale. On peut y parvenir en minorant d'abord la fonction sous l'intégrale (f') par une autre fonction dont on pourra calculer l'intégrale. L'intégrale obtenue devra donner du ln(x), du $\dfrac{1}{x}$ ...*

$\forall x \geq 1, \forall t \in [1;x]$, $\dfrac{e^t(t-1)}{t^2} \geq \dfrac{e^1(t-1)}{t^2}$ par croissance de la fonction exponentielle

c'est-à-dire : $\dfrac{e^t(t-1)}{t^2} \geq \dfrac{e(t-1)}{t^2}$

Pourquoi ai-je voulu me débarrasser de e^t en le minorant par e ? Parce que dans l'intégrale sur laquelle je vais tomber, et que je vais devoir calculer, il ne devrait pas y avoir de fonction exponentielle vu ce que je dois obtenir. Par ailleurs, en faisant cela j'ai réussi à obtenir un e en facteur qui se retrouve dans le résultat final. Maintenant, il s'agit de savoir si je sais intégrer le membre de droite ou s'il va me falloir encore le minorer...

www.ayoub-et-les-maths.com
ayoub.hajlaoui.scolaire@gmail.com

On a montré : $\forall x \geq 1, \forall t \in [1; x], \dfrac{e^t(t-1)}{t^2} \geq \dfrac{e(t-1)}{t^2}$

Autrement dit : $\forall x \geq 1, \forall t \in [1; x], \dfrac{e^t(t-1)}{t^2} \geq e(\dfrac{1}{t} - \dfrac{1}{t^2})$

Et ce membre de droite, bien sûr que je peux en trouver une primitive...

Donc, en intégrant :

$\forall x \geq 1, \displaystyle\int_1^x \dfrac{e^t(t-1)}{t^2}\,\mathrm{d}t \geq \int_1^x e(\dfrac{1}{t} - \dfrac{1}{t^2})\,\mathrm{d}t = e\int_1^x (\dfrac{1}{t} - \dfrac{1}{t^2})\,\mathrm{d}t = e\Big[\ln(t) + \dfrac{1}{t}\Big]_1^x$ Donc :

$\forall x \geq 1, \displaystyle\int_1^x \dfrac{e^t(t-1)}{t^2}\,\mathrm{d}t \geq e\Big(\ln(x) + \dfrac{1}{x} - \ln(1) - \dfrac{1}{1}\Big)$

Donc : $\forall x \geq 1, \displaystyle\int_1^x \dfrac{e^t(t-1)}{t^2}\,\mathrm{d}t \geq e\Big(\ln(x) + \dfrac{1}{x} - 1\Big)$

Or, d'après 2), $f(x) = e + \displaystyle\int_1^x \dfrac{e^t(t-1)}{t^2}\,\mathrm{d}t$

Donc : $\forall x \geq 1,$ $\boxed{f(x) \geq e + e\Big(\ln(x) + \dfrac{1}{x} - 1\Big)}$

4) *Question à laquelle on peut répondre même si on n'a pas fait tout le reste (en supposant connu le résultat de la question précédente). Mais conclure quoi ? Relisez le but de l'exercice...*

$\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0.$

Donc, par opérations sur les limites : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} e + e\Big(\ln(x) + \dfrac{1}{x} - 1\Big) = +\infty$

Or : $\forall x \geq 1, f(x) \geq e + e\Big(\ln(x) + \dfrac{1}{x} - 1\Big).$

Donc, par théorème de comparaison, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

On en conclut : $\boxed{\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty}$

www.ayoub-et-les-maths.com
ayoub.hajlaoui.scolaire@gmail.com