Étude d'une fonction trigonométrique

Ayoub Hajlaoui

Piégée entre deux droites, à identique pente,
Dans cette route étroite, une courbe serpente.

Énoncé :

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x + \cos^2(x)$ et C sa courbe représentative.

1) a) Démontrer que pour tout réel x, $x \leq f(x) \leq x + 1$.
b) En déduire les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
c) Interpréter graphiquement l'encadrement précédent.

2) On note (d_1) et (d_2) les droites d'équation $y = x$ et $y = x+1$. Déterminer les points d'intersection de C avec (d_1), puis avec (d_2) .

3) a) Soit f' la dérivée de f. Montrer que pour tout réel x, $f'(x) = 1 - \sin(2x)$.
b) En déduire le sens de variation de la fonction f.
c) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f'(x) = 0$.

4) a) Dresser le tableau de variations de f sur $[0; \pi]$.
b) Tracer (d_1), (d_2) et la représentation graphique de f sur $[0; \pi]$.

5) a) Démontrer que pour tout réel x, $f(x + \pi) = f(x) + \pi$.
b) Comment déduire la courbe C de la représentation graphique de f sur $[0; \pi]$?

Correction :

1) a) $\forall x \in \mathbb{R}, \ -1 \leq \cos(x) \leq 1$ donc $0 \leq \cos^2(x) \leq 1$. Donc $x \leq x + \cos^2(x) \leq x + 1$
Donc : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \ x \leq f(x) \leq x + 1.}$

b) *On nous demande de prouver un encadrement puis de faire un calcul de limites. Attendez, ça sonne, je vais ouvrir, je crois que ce sont les gendarmes...*
$\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} x + 1 = +\infty$. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x \leq f(x) \leq x + 1$
Donc d'après le théorème des gendarmes, $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty}$
De la même manière, $\boxed{\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty}$

c) Graphiquement, l'encadrement obtenu en 1)a) signifie que la courbe C se situe entre les deux droites d'équations respectives $y = x$ et $y = x + 1$.

2) Un point $M(x, y)$ d'intersection de C avec la droite (d_1) (d'équation $y = x$) est un point dont l'abscisse x vérifie $f(x) = x$ (et dont l'ordonnée vérifie évidemment $y = f(x) = x$). Résolvons donc cette équation :

$$f(x) = x \Leftrightarrow x + \cos^2(x) = x \Leftrightarrow \cos^2(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \cos(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$\boxed{\text{Les points d'intersection de } C \text{ avec } (d_1) \text{ sont donc les points } M_k \text{ de coordonnées } (\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)}$
avec $k \in \mathbb{Z}$

De même, un point $M(x, y)$ d'intersection de C avec la droite (d_2) (d'équation $y = x + 1$) est un point dont l'abscisse x vérifie $f(x) = x + 1$ (et dont l'ordonnée vérifie évidemment $y = f(x) = x + 1$). Résolvons donc cette équation :

$$f(x) = x + 1 \Leftrightarrow x + \cos^2(x) = x + 1 \Leftrightarrow \cos^2(x) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \cos(x) = 1 \text{ ou } -1 \Leftrightarrow x = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Les points d'intersection de C avec (d_2) sont donc tous les points M_k de coordonnées $(k\pi, k\pi + 1)$ avec $k \in \mathbb{Z}$

3) a) $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 1 - 2\sin(x)\cos(x)$ *(on a utilisé la formule de la dérivée de u^n avec u une fonction dérivable)*

Et là, il faut se souvenir d'une formule de trigo : $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$

Donc : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\boxed{f'(x) = 1 - 2\sin(2x)}$

b) $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sin(2x) \leq 1$ (un sinus étant toujours compris entre -1 et 1). Donc $1 - \sin(2x) \geq 0$.

Donc $f'(x) \geq 0$.

Donc la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}$.

c) Résolvons l'équation $f'(x) = 0$ dans $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 \Longleftrightarrow 1 - \sin(2x) = 0 \Longleftrightarrow \sin(2x) = 1 \quad &\Longleftrightarrow \quad 2x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z} \\ &\Longleftrightarrow \quad x = \frac{\pi}{4} + k\pi, \ k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de l'équation $f'(x) = 0$ dans $\mathbb{R}$ est donc $\left\{\frac{\pi}{4} + k\pi, \ k \in \mathbb{Z}\right\}$.

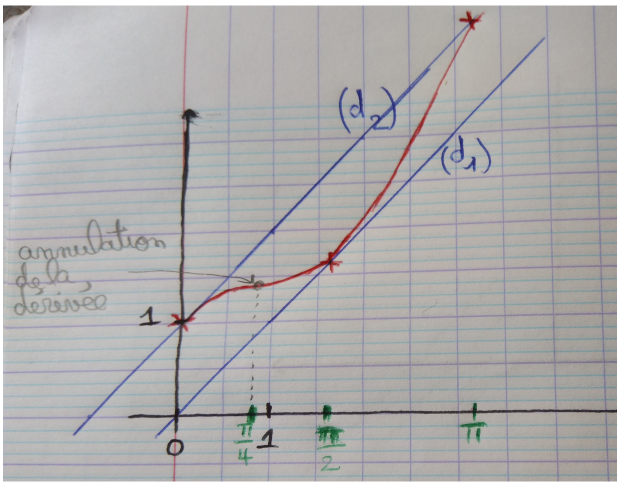
4) a) On sait que f est croissante sur $\mathbb{R}$ (cf 3)b)).

De plus, $f(0) = 0 + \cos^2(0) = 1$ et $f(\pi) = \pi + \cos^2(\pi) = \pi + (-1)^2 = \pi + 1$.

On obtient alors le tableau de variation suivant pour la fonction f sur $[0; \pi]$:

x	0		π
$f(x)$	1	$\nearrow$	$\pi+1$

b) En traçant (d_1) et (d_2), en tenant compte des points d'intersection de C avec ces droites, et de l'annulation de la dérivée de f en $\frac{\pi}{4}$, on obtient le tracé suivant :



La courbe de f est en rouge

www.ayoub-et-les-maths.com
ayoub.hajlaoui.scolaire@gmail.com

5) a) $\forall x \in \mathbb{R}, f(x+\pi) = x+\pi+\cos^2(x+\pi) = x+\pi+(\cos(x+\pi))^2 = x+\pi+(-\cos(x))^2$
car $\cos(x+\pi) = -\cos(x)$
Donc $f(x+\pi) = x+\pi+\cos^2(x) = (x+\cos^2(x))+\pi$
Donc : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, f(x+\pi) = f(x)+\pi}$

b) En utilisant l'égalité obtenue en 5)a), pour continuer le tracé de la courbe sur $[\pi; 2\pi]$, on reprend la même courbe que celle sur $[0; \pi]$, en rajoutant π en ordonnée.

Plus généralement, pour obtenir le tracé sur n'importe quel intervalle $[k\pi; (k+1)\pi]$, on reprend le tracé sur $[0; \pi]$ en décalant les ordonnées de $k\pi$.

www.ayoub-et-les-maths.com
ayoub.hajlaoui.scolaire@gmail.com