Loi normale et taille hommes/femmes

Ayoub Hajlaoui

Le résultat est proche ! Entendez-vous tinter
Ces deux courbes en cloche aux rebords esquintés ?

Énoncé : (temps conseillé : 30 min) Polynésie, juin 2015

Dans un pays, la taille en centimètres des femmes de 18 à 65 ans peut être modélisée par une variable aléatoire X_1 suivant la loi normale d'espérance $\mu_1 = 165$ cm et d'écart-type $\sigma_1 = 6$ cm, et celle des hommes de 18 à 65 ans, par une variable aléatoire X_2 suivant la loi normale d'espérance $\mu_2 = 175$ cm et d'écart-type $\sigma_2 = 11$ cm.

Dans cet exercice, tous les résultats seront arrondis à 10^{-2} près.

1. Quelle est la probabilité qu'une femme choisie au hasard dans ce pays mesure entre 1,53 mètre et 1,77 mètre ?
2. (a) Déterminer la probabilité qu'un homme choisi au hasard dans ce pays mesure plus de 1,70 mètre.

   (b) De plus, on sait que dans ce pays les femmes représentent 52 % de la population des personnes dont l'âge est compris entre 18 et 65 ans. On choisit au hasard une personne qui a entre 18 et 65 ans. Elle mesure plus de 1, 70 m. Quelle est la probabilité que cette personne soit une femme ?

Correction :

1) *On répond à ce genre de question soit en utilisant la calculatrice, soit en reconnaissant une valeur particulière de probabilité dans le cadre des lois normales. Si la seconde option est possible, ne nous en privons surtout pas.*

Remarquons : $153 = 165 - 12 = 165 - 2 \times 6$ et $177 = 165 + 12 = 165 + 2 \times 6$

Autrement dit, $153 = \mu_1 - 2\sigma_1$ et $177 = \mu_1 + 2\sigma_1$.

La probabilité qu'une femme choisie au hasard dans ce pays mesure entre 1,53 mètre et 1,77 mètre est donc : $P(153 < X_1 < 177) = P(\mu_1 - 2\sigma_1 < X_1 < \mu_1 + 2\sigma_1)$

Une loi normale étant une loi de probabilité continue (contrairement par exemple à une loi binomiale), le fait de mettre $<$ ou $\leq$ pour l'intervalle n'a pas d'importance.

Or, d'après le cours, si une variable aléatoire X_1 suit une loi normale de moyenne μ_1 et d'écart-type σ_1, on a : $P(\mu_1 - 2\sigma_1 < X_1 < \mu_1 + 2\sigma_1) \simeq 0.95$ (à 10^{-2} près)

Donc : $\boxed{P(153 < X_1 < 177) \simeq 0.95}$

2)a) *En faisant la différence entre 175 (μ_2) et 170, on ne reconnaît ni σ_2, ni $2\sigma_2$, ni $3\sigma_2$... Calculatrice, donc.*

Avec la calculatrice, on calcule la probabilité pour la variable aléatoire X_2 d'espérance $\mu_2 = 175$ et d'écart-type $\sigma_2 = 11$ de tomber entre 170 et 10^{99} (en considérant que cette probabilité est sensiblement égale à celle de se trouver entre 170 et $+\infty$).

La probabilité qu'un homme choisi au hasard dans ce pays mesure plus de 1,70 mètre est : $\boxed{P(X_2 > 170) \simeq 0,68}$

2)b) Soit une personne qui a entre 18 et 65 ans.

Pas besoin de poser l'événement " la personne a entre 18 et 65 ans " pour ensuite calculer des probabilités conditionnelles par rapport à cet événement. Ce serait se compliquer la vie pour rien. En effet, dans tout l'exercice, on ne parle que de personnes entre 18 et 65 ans.

Appelons F l'événement : " cette personne est une femme. "
Appelons G l'événement : " cette personne mesure plus de 1,70 m ".
L'énoncé nous demande de calculer $P_G(F)$.

Un cas classique... Nous n'avons pas d'information sur les probabilités conditionnelles dans ce sens-là : jouons donc sur $P(G \cap F)$ pour faire apparaître les probabilités conditionnelles dans l'autre sens.

D'après la formule des probabilités conditionnelles, $P_G(F) = \dfrac{P(G \cap F)}{P(G)} = \dfrac{P_F(G) \times P(F)}{P(G)}$

Parmi ces trois probabilités, lesquelles connaissons-nous ? $P(F)$ est connu. $P_G(F)$ peut l'être... Quant à $P(G)$... La formule des probabilités totales vous tire souvent de ce genre de mauvais pas.

D'après la formule des probabilités totales :
$P(G) = P(G \cap F) + P(G \cap \bar{F}) = P_F(G) \times P(F) + P_{\bar{F}}(G) \times P(\bar{F})$
Donc $P_G(F) = \dfrac{P_F(G) \times P(F)}{P_F(G) \times P(F) + P_{\bar{F}}(G) \times P(\bar{F})}$

D'après l'énoncé, $\underline{P(F) = 0,52}$. On en conclut aussi : $\underline{P(\bar{F}) = 0,48}$

De plus, $P_{\bar{F}}(G)$ est la probabilité, sachant que la personne est un homme, qu'elle mesure plus de 1,70 mètre. Cette probabilité est égale à $P(X_2 > 170)$ (qui a été approximée à la question 2a).

Enfin, $P_F(G)$ est la probabilité, sachant que la personne est une femme, qu'elle mesure plus de 1,70 mètre. Cette probabilité est égale à $P(X_1 > 170)$.

Donc $P_G(F) = \dfrac{P(X_1 > 170) \times P(F)}{P(X_1 > 170) \times P(F) + P(X_2 > 170) \times P(\bar{F})}$
Donc $P_G(F) = \dfrac{P(X_1 > 170) \times 0,52}{P(X_1 > 170) \times 0,52 + P(X_2 > 170) \times 0,48}$

Même si on a déjà trouvé une approximation de $P(X_2 > 170)$ à 10^{-2} près à la question 2a, il vaut mieux ne pas réutiliser cette approximation ici, pour ne pas risquer qu'approximation sur approximation ne nuisent à la précision du résultat final.

Pour $P(X_1 > 170)$ et $P(X_2 > 170)$, on utilise la calculatrice (de la même manière qu'en 2a, en changeant la moyenne et l'écart-type pour X_1).

Finalement, on obtient la probabilité qu'une personne de 18 à 65 ans de ce pays, choisie au hasard et qui mesure plus de 1,70 m, soit une femme : $\boxed{P_G(F) \simeq 0,25}$