Nombre de solutions d'une équation logarithmique

Ayoub Hajlaoui

Combien de solutions pour l'équation tordue
Qui n'a pour vocation que de nous voir perdus ?

Énoncé : (temps conseillé : 30 min) Antilles-Guyane, septembre 2014

On considère l'équation $\left(E_1\right) : \mathrm{e}^x - x^n = 0$
où x est un réel strictement positif et n un entier naturel non nul.

1. Montrer que l'équation $\left(E_1\right)$ est équivalente à l'équation $\left(E_2\right) : \ln(x) - \dfrac{x}{n} = 0$
2. Pour quelles valeurs de n l'équation $\left(E_1\right)$ admet-elle deux solutions ?

Correction :

1) *On sent bien qu'il va falloir appliquer la fonction ln, mais à qui ? Hors de question de l'appliquer tout de suite aux deux membres de l'équation* $\left(E_1\right)$ *: on ne voudrait pas que le correcteur barre rageusement une sottise comme* $\ln(0)$ *...*
Donc nécessairement, avant d'appliquer ln, il va falloir passer x^n *à droite.*

$\left(E_1\right) \iff e^x = x^n \iff \ln(e^x) = \ln(x^n)$ ($x > 0$ donc $x^n > 0$ donc $\ln(x^n)$ est bien défini)
Donc $\left(E_1\right) \iff x = n\ln(x)$ *si on n'a pas oublié ses formules avec ln...*
Donc $\left(E_1\right) \iff \dfrac{x}{n} = \ln(x) \iff \ln(x) - \dfrac{x}{n} = 0$

Donc $\boxed{\text{l'équation } \left(E_1\right) \text{ est équivalente à l'équation } \left(E_2\right) : \ln(x) - \dfrac{x}{n} = 0}$

2) *Tout d'abord, on peut être sûrs que l'équation* $\left(E_2\right)$ *doit servir. Sinon, quel intérêt d'avoir posé la question 1 ?*
Par ailleurs, efforçons-nous de nous rattacher à un point connu du programme. À quel point du cours une question sur le nombre de solutions d'une équation pourrait-elle nous faire penser ? Au TVI.

Nous allons plutôt nous intéresser au nombre de solutions de l'équation $\left(E_2\right)$ (équivalente à $\left(E_1\right)$) en fonction de la valeur de l'entier naturel non nul n.
Soit $n > 0$ un entier. Appelons f_n la fonction définie sur $]\,0; +\infty\,[$ par $f_n(x) = \ln(x) - \dfrac{x}{n}$
L'équation $\left(E_1\right)$ est équivalente à l'équation $f_n(x) = 0$.
La variable de l'équation est bien x, et pas n...
Étudions les variations de f_n sur $]\,0; +\infty\,[$. f_n est dérivable sur $]0; +\infty[$ comme somme de fonctions dérivables.
$\forall x \in]\,0; +\infty\,[\,,\ f_n'(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{n}$ *(n est une constante aux yeux de la fonction* f_n*)*
Donc $f_n'(x) = \dfrac{n-x}{nx}$, qui est du signe de $n - x$ (le dénominateur étant strictement positif).
Donc $f_n'(x) \geq 0 \iff n - x \geq 0 \iff x \leq n$ (et $f_n'(x) \leq 0 \iff x \geq n$)

De plus, $\lim\limits_{x \to 0} f_n(x) = -\infty$ (par calcul simple de limite).

En $+\infty$, forme indéterminée...
$f_n(x) = \ln(x) - \dfrac{x}{n} = x\left(\dfrac{\ln(x)}{x} - \dfrac{1}{n}\right)$
$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$ (croissance comparée), donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} - \dfrac{1}{n} = -\dfrac{1}{n}$
Donc, par calcul de limite : $\lim\limits_{x \to +\infty} x\left(\dfrac{\ln(x)}{x} - \dfrac{1}{n}\right) = -\infty$
Autrement dit, $\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x) = -\infty$

Enfin, $f_n(n) = \ln(n) - \dfrac{n}{n} = \ln(n) - 1$
On obtient donc le tableau de signe (pour f_n') et le tableau de variation (pour f_n) suivants :

x	0		n		$+\infty$
$f_n'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
f_n	$-\infty$	$\nearrow$	$\ln(n) - 1$	$\searrow$	$-\infty$

Répondons enfin à la question posée...

D'après le tableau de variations de f_n, l'équation $\left(E_1\right)$, c'est-à-dire l'équation $f_n(x) = 0$ (qui lui est équivalente) admet deux solutions si et seulement si $\ln(n) - 1 > 0$.

En effet, si $\ln(n) - 1 > 0$, on applique le corollaire du Théorème des Valeurs Intermédiaires (TVI) séparément sur $]0\ ;\ n]$ et $]n\ ;\ +\infty[$:
f_n est continue, strictement croissante sur $]0\ ;\ n]$ avec $\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x) = -\infty$ et $f_n(n) = \ln(n) - 1$ et $0 \in]-\infty\ ;\ \ln(n) - 1[$. Donc d'après le corollaire du TVI, l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution sur $]0\ ;\ n]$.
De la même manière, on montre que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution sur $]n\ ;\ +\infty[$.
Donc si $\ln(n) - 1 > 0$, l'équation $\left(E_1\right)$ admet deux solutions sur $]0\ ;\ +\infty[$.

Maintenant, si $\ln(n) - 1 < 0$, étant donné que $\ln(n) - 1$ est le maximum de f_n sur $]0\ ;\ +\infty[$, la fonction f_n est strictement négative sur $]0\ ;\ +\infty[$, et l'équation $f_n(x) = 0$ n'a pas de solution.

Enfin, le dernier cas $\ln(n) - 1 = 0$ est impossible, car il impliquerait $\ln(n) = 1$, c'est-à-dire $n = e$ (impossible, n est un entier).

Conclusion : l'équation $\left(E_1\right)$ admet deux solutions si et seulement si $\ln(n) - 1 > 0$, c'est-à-dire si et seulement si $\ln(n) > 1$, c'est-à-dire si et seulement si $n > e$ (en appliquant la fonction exponentielle croissante aux deux membres de l'inégalité).

$\boxed{\text{L'équation } \left(E_1\right) \text{ admet donc deux solutions si et seulement si } n \geq 3.}$ *(n étant entier)*