Suite arithmético-géométrique complexe

Ayoub Hajlaoui

Énoncé : (temps conseillé : 20 min)

On considère la suite (z_n) de nombres complexes définie comme suit :

$$\left\{\begin{array}{ccc} z_0 & = & 1 \\ \text{Pour tout entier naturel } n,\ z_{n+1} & = & iz_n + i \end{array}\right.$$

1) Calculer z_1, z_2 et z_3.

2) On pose $Z = -\frac{1}{2} + \frac{i}{2}$. Soit (w_n) la suite complexe définie pour tout entier naturel n par $w_n = z_n - Z$.

a) Exprimer w_{n+1} en fonction de w_n.
b) En déduire l'expression du terme général w_n.
c) En déduire l'expression du terme général z_n.
d) Combien suffit-il de positions sur le plan pour placer tous les points M_n d'affixes les termes de la suite (z_n) ?

Correction :

1) $z_1 = iz_0 + i = i \times 1 + i$, donc $\boxed{z_1 = 2i.}$ $z_2 = iz_1 + i = i \times 2i + i$, donc $\boxed{z_2 = -2 + i.}$
$z_3 = iz_2 + i = i \times (-2 + i) + i$, donc $\boxed{z_3 = -1 - i.}$

2)a) $\forall n \in \mathbb{N},\ \ w_{n+1} = z_{n+1} - Z = iz_n + i + \frac{1}{2} - \frac{i}{2} = iz_n + \frac{1}{2} + \frac{i}{2} = i(z_n - \frac{i}{2} + \frac{1}{2})$

Il semble évident que $-i \times i = 1$, mais le faire dans l'autre sens pour factoriser par i est un brin moins intuitif.

Donc $w_{n+1} = i\big(z_n - (-\frac{1}{2} + \frac{i}{2})\big) = i(z_n - Z)$. Donc : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, w_{n+1} = iw_n.}$

2)b) On en déduit : $\forall n \in \mathbb{N}, w_n = i^n \times w_0 = i^n(z_0 - Z) = i^n(1 - Z) = i^n\big(1 - (-\frac{1}{2} + \frac{i}{2})\big)$

Donc : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \ w_n = i^n(\frac{3}{2} - \frac{i}{2})}$

Faut-il justifier plus que cela ? La réponse n'est pas tranchée. On connaît le terme général d'une suite géométrique de raison et de premier terme connus. Mais le cours aborde les suites géométriques dans le cas réel. Dans le cas complexe, rien ne change : la récurrence simple qui permet de démontrer le résultat du cours tient toujours.

2)c) On sait : $\forall n \in \mathbb{N}, w_n = z_n - Z$ donc $z_n = w_n + Z$.

Donc : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \ z_n = i^n(\frac{3}{2} - \frac{i}{2}) - \frac{1}{2} + \frac{i}{2}}$

www.ayoub-et-les-maths.com
ayoub.hajlaoui.scolaire@gmail.com

2)d) Dans l'expression de z_n obtenue à la question précédente, le seul terme dépendant de n est i^n.
Or, $i^0 = 1,\ i^1 = i,\ i^2 = -1,\ i^3 = -i,\ i^4 = 1 = i^0$...

i^n peut donc prendre 4 valeurs distinctes : $1, i, -1, -i$.

$\boxed{\text{L'ensemble des points } M_n \text{ se réduit donc à 4 points distincts sur le plan.}}$

www.ayoub-et-les-maths.com
ayoub.hajlaoui.scolaire@gmail.com