Suite parabolique

Ayoub Hajlaoui

Le nombre a-t-il besoin d'une sage auréole ?
Les maths offrent du moins de belles paraboles.

Énoncé : (temps conseillé : 55 min) Polynésie, juin 2014

On considère la suite (u_n) définie par

$$u_0 = 0 \quad \text{et, pour tout entier naturel } n, u_{n+1} = u_n + 2n + 2.$$

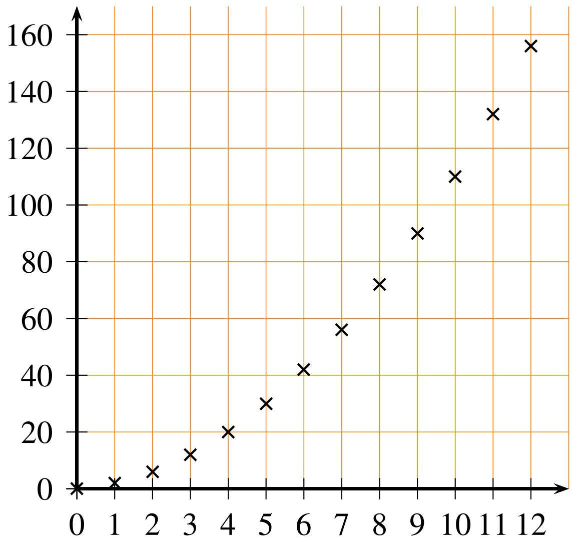
1. Calculer u_1 et u_2.
2. On considère les deux algorithmes suivants :

Algorithme 1		**Algorithme 2**	
Variables :	n est un entier naturel u est un réel	**Variables :**	n est un entier naturel u est un réel
Entrée :	Saisir la valeur de n	**Entrée :**	Saisir la valeur de n
Traitement :	u prend la valeur 0 Pour i allant de 1 à n : u prend la valeur $u + 2i + 2$ Fin Pour	**Traitement :**	u prend la valeur 0 Pour i allant de 0 à $n - 1$: u prend la valeur $u + 2i + 2$ Fin Pour
Sortie :	Afficher u	**Sortie :**	Afficher u

De ces deux algorithmes, lequel permet d'afficher en sortie la valeur de u_n, la valeur de l'entier naturel n étant entrée par l'utilisateur ?

3. À l'aide de l'algorithme, on a obtenu le tableau et le nuage de points ci-dessous où n figure en abscisse et u_n en ordonnée.

n	u_n
0	0
1	2
2	6
3	12
4	20
5	30
6	42
7	56
8	72
9	90
10	110
11	132
12	156



(a) Quelle conjecture peut-on faire quant au sens de variation de la suite (u_n) ?
Démontrer cette conjecture.

www.ayoub-et-les-maths.com
ayoub.hajlaoui.scolaire@gmail.com

(b) La forme parabolique du nuage de points amène à conjecturer l'existence de trois réels a, b et c tels que, pour tout entier naturel n, $u_n = an^2 + bn + c$.
Dans le cadre de cette conjecture, trouver les valeurs de a, b et c à l'aide des informations fournies.

4. On définit, pour tout entier naturel n, la suite (v_n) par : $v_n = u_{n+1} - u_n$.
   (a) Exprimer v_n en fonction de l'entier naturel n. Quelle est la nature de la suite (v_n) ?
   (b) On définit, pour tout entier naturel n, $S_n = \sum_{k=0}^{n} v_k = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$.
   Démontrer que, pour tout entier naturel n, $S_n = (n+1)(n+2)$.
   (c) Démontrer que, pour tout entier naturel n, $S_n = u_{n+1} - u_0$, puis exprimer u_n en fonction de n.

Correction :

1) *L'erreur usuelle ici serait de s'emmêler les pinceaux et de prendre $n = 1$ au lieu de $n = 0$...*
Pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n + 2n + 2$.
Donc $u_{0+1} = u_0 + 2 \times 0 + 2$. Autrement dit, $u_1 = 0 + 0 + 2$. Donc $\boxed{u_1 = 2.}$
De même, $u_{1+1} = u_1 + 2 \times 1 + 2$. Donc $u_2 = 2 + 2 + 2$. Donc $\boxed{u_2 = 6.}$

2) *Avant de répondre à la question, il faut évidemment se demander quelle est la différence entre ces deux algorithmes très similaires.*
Pour les deux algorithmes, la valeur initiale de u correspond à u_0.
La seule différence entre les deux algorithmes est la suivante : dans " Traitement ", i va de 1 à n pour l'algorithme 1, et de 0 à n pour l'algorithme 2.
Dans l'algorithme 1, la première valeur de u (correspondant à u_0) est donc, dans un premier temps, remplacée par $u_0 + 2 \times 1 + 2$. Dans l'algorithme 2, elle est remplacée par $u_0 + 2 \times 0 + 2$. Et c'est cette seconde valeur qui correspond bien à u_1 (voir question 1).
C'est donc l'algorithme 2 qui permettra d'afficher en sortie la valeur de u_n.

3)a) On peut conjecturer que la suite (u_n) est strictement croissante. Démontrons cette conjecture.

Pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n = u_n + 2n + 2 - u_n = 2n + 2$. Donc $u_{n+1} - u_n > 0$
La suite (u_n) est donc strictement croissante.

3)b) *Cette question peut être un peu bloquante. Il faut se poser la question suivante : combien d'inconnues dois-je déterminer ? 3. Combien d'équations indépendantes me faut-il donc ? 3. Où vais-je trouver ces 3 informations ?*

D'après la conjecture formulée par l'énoncé : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = an^2 + bn + c$
Donc $u_0 = a \times 0^2 + b \times 0 + c = c$. De plus, on sait : $u_0 = 0$. Donc $\boxed{c = 0.}$

De même, $u_1 = a \times 1^2 + b \times 1 + 0 = a + b$. De plus, $u_1 = 2$ (cf question 1). Donc $\underline{a + b = 2}$.
Et $u_2 = a \times 2^2 + b \times 2 + 0 = 4a + 2b$. De plus, $u_2 = 6$ (cf question 1). Donc $\underline{4a + 2b = 6}$.
Pour déterminer a et b, il suffit donc de résoudre le système suivant : $\left\{\begin{array}{lcll} a+b & = & 2 & (L_1) \\ 4a+2b & = & 6 & (L_2) \end{array}\right.$

Ce système équivaut à : $\left\{\begin{array}{ccccc} a+b & = & 2 & (L_1) \\ 4a+2b-(2a+2b) & = & 6-2\times 2 & (L_2 - 2L_1) \end{array}\right.$ *Résolution par combinaison : on fait disparaître b dans la seconde équation*

Finalement : $\left\{\begin{array}{lcl} a+b & = & 2 \\ 2a & = & 2 \end{array}\right.$ et donc $\left\{\begin{array}{lcl} b & = & 2-a \\ a & = & 1 \end{array}\right.$. Donc $\boxed{a = 1}$ et $\boxed{b = 1.}$

Donc $u_n = n^2 + n$.

4)a) *Attention, dans cette question, il ne s'agit évidemment pas d'utiliser l'expression de u_n trouvée dans le cadre de la conjecture précédente.*

$\forall n \in \mathbb{N},\ \ v_n = u_{n+1} - u_n = u_n + 2n + 2 - u_n = 2n + 2.$

On reconnaît là une expression d'un type de suite qu'on connaît bien. Enfin, qu'on est censé bien connaître...

Donc $\boxed{(v_n) \text{ est une suite arithmétique de premier terme 2 et de raison 2.}}$

4)b) Pour tout entier naturel n, S_n est la somme des $n+1$ premiers termes de la suite arithmétique (v_n) (de premier terme 2 et de raison 2).

Il y a bien $n+1$ et non n termes dans la somme, car k varie de 0 à n.

Donc : $\forall n \in \mathbb{N},\ S_n = \dfrac{v_0 + v_n}{2} \times (n+1)$ *(moyenne des premier et dernier terme)* $\times$ *(nb de termes)*

Donc : $\forall n \in \mathbb{N},\ S_n = \dfrac{2 + 2n + 2}{2} \times (n+1) = \dfrac{2n+4}{2} \times (n+1)$

Donc, $\boxed{\text{pour tout entier naturel } n,\ S_n = (n+1)(n+2).}$

4)c) *Allons-nous utiliser le résultat de la question précédente pour répondre à la première partie de cette question-ci ? Pas si on a bien vu que la question précédente servira à la seconde partie...*

En remplaçant, dans S_n, chaque terme v_k de la somme par son expression en fonction des termes de la suite u, on obtient :

$\forall n \in \mathbb{N},\ S_n = v_0 + v_1 + ... + v_n = (u_1 - u_0) + (u_2 - u_1) + ... + (u_{n+1} - u_n)$

Par télescopage (c'est-à-dire par simplification massive de termes opposés), il ne reste plus que $-u_0$ et u_{n+1} dans cette somme, et on a alors : $\boxed{S_n = u_{n+1} - u_0.}$

Bien qu'en Terminale, on manipule rarement le signe somme, on aurait aussi pu le faire de la façon suivante : $S_n = \sum_{k=0}^{n} v_k = \sum_{k=0}^{n} (u_{k+1} - u_k) = \sum_{k=0}^{n} u_{k+1} - \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{n+1} u_k - \sum_{k=0}^{n} u_k$ *(changement de variable)*

D'où $S_n = (\sum_{k=1}^{n} u_k) + u_{n+1} - (\sum_{k=1}^{n} u_k) - u_0 = u_{n+1} - u_0$

Donc : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = S_n + u_0.$ *Mais nous voulons u_n, pas u_{n+1}...*

Donc : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = S_{n-1} + u_0$ *on doit avoir $n \geq 1$ sinon S_{n-1} ne sera pas défini ($n - 1 < 0$)*

Or, on sait (cf question 4)b)) : $\forall n \in \mathbb{N}, S_n = (n+1)(n+2).$

Donc : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = n(n+1) + u_0 = n(n+1) + 0 = n^2 + n.$

Cela est aussi valable pour $n = 0$, puisque $u_0 = 0 = 0^2 + 0$.

On peut donc en conclure : $\boxed{\text{pour tout entier naturel } n,\ u_n = n^2 + n.}$

Ce qui démontre le résultat obtenu à partir de la conjecture en 3)b)...