Transformation complexe et orthogonalité

Ayoub Hajlaoui

Au fond du désarroi, il en perd ses réflexes :
" Comment voir l'angle droit quand le plan est complexe ? "

Énoncé : (temps conseillé : 25 min)

$(O, \vec{u}, \vec{v})$ est un repère orthonormal direct du plan complexe.
Soit A le point d'affixe $1 + \mathrm{i}$.
Au point M d'affixe z, on associe le point M' d'affixe z' telle que

$$z' = \frac{1}{2}\left(z + \mathrm{i}\overline{z}\right).$$

On pose $z = x + \mathrm{i}y$ et $z' = x' + \mathrm{i}y'$ avec x, y, x' et y' réels.

1. Démontrer que le point M' appartient à la droite $(\mathrm{O}A)$.
2. Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que $M = M'$.
3. Démontrer que pour tout point M du plan tel que $M \neq M'$, les vecteurs $\overrightarrow{MM'}$ et $\overrightarrow{\mathrm{O}A}$ sont orthogonaux.

Correction :

1) *Pour savoir si le point M' appartient à la droite (OA), il suffit d'étudier ses coordonnées. Mais au fait, quelle est l'équation de la droite (OA) ?*

La droite $(\mathrm{O}A)$ passe par l'origine du repère. Son équation est donc de la forme $y = ax$. Grâce aux coordonnées du point A, on en déduit $a = 1$. La droite $(\mathrm{O}A)$ a donc pour équation $y = x$.

Calculons les coordonnées x' (partie réelle de z') et y' (partie imaginaire de z') du point M'.
$z' = \frac{1}{2}\left(z + \mathrm{i}\overline{z}\right) = \frac{1}{2}\left(x + \mathrm{i}y + \mathrm{i}(\overline{x + iy})\right) = \frac{1}{2}\big(x + \mathrm{i}y + \mathrm{i}(x - iy)\big) = \frac{1}{2}\big(x + \mathrm{i}y + \mathrm{i}x + \mathrm{i}y\big)$
Donc $z' = \frac{1}{2}(x + y) + \mathrm{i} \times \frac{1}{2}(x + y)$
Donc $x' = \frac{1}{2}(x + y)$ et $y' = \frac{1}{2}(x + y)$
On remarque $y' = x'$. M' vérifie donc bien l'équation de la droite $(\mathrm{O}A)$.
$\boxed{\text{Donc le point } M' \text{ appartient à la droite } (\mathrm{O}A).}$

2) Soit M un point du plan, d'affixe $z = x + \mathrm{i}y$ et M' son image, d'affixe $z' = x' + \mathrm{i}y'$.
$M = M' \iff z = z' \iff z = \frac{1}{2}\left(z + \mathrm{i}\overline{z}\right) \iff x + \mathrm{i}y = \frac{1}{2}(x + y) + \mathrm{i} \times \frac{1}{2}(x + y)$
(en reprenant l'expression de z' obtenue en 1)

Par identification (par unicité de la partie réelle et de la partie imaginaire d'un nombre complexe), on a donc l'équivalence suivante :

$$M = M' \iff \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & \frac{1}{2}(x+y) \\ y & = & \frac{1}{2}(x+y) \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcl} \frac{1}{2}x & = & \frac{1}{2}y \\ \frac{1}{2}y & = & \frac{1}{2}x \end{array} \right. \iff x = y \iff M \in (\mathrm{O}A)$$

$\boxed{\text{L'ensemble des points } M \text{ du plan tels que } M = M' \text{ est donc la droite } (\mathrm{O}A).}$

3) *Trois façons principales de traiter cette question. Soit on calcule les coordonnées des deux vecteurs (connaissant les coordonnées des quatre points) pour ensuite calculer leur produit scalaire, et trouver 0 (option la plus simple ici). Soit on calcule les longueurs pour utiliser la réciproque du théorème de Pythagore. Soit on se sert de considérations plus spécifiques au chapitre Complexes. C'est la dernière option qui sera choisie ici, car c'est celle avec laquelle, en général, vous avez le plus de mal, et ce dans l'optique de multiplier vos options le jour J. Quand vous avez le choix, choisissez la méthode avec laquelle vous êtes le plus à l'aise.*

Soit M un point du plan tel que $M \neq M'$ (c'est-à-dire, d'après la question précédente, tel que $M \notin (\mathrm{O}A)$)

Notons z_A l'affixe de A. D'après le cours, on a la formule suivante pour l'angle orienté $(\overrightarrow{\mathrm{O}A}, \overrightarrow{MM'})$:

$(\overrightarrow{\mathrm{O}A}, \overrightarrow{MM'}) = \mathrm{Arg}\left(\dfrac{z'-z}{z_A - 0}\right) = \mathrm{Arg}\left(\dfrac{z'-z}{1+\mathrm{i}}\right)$

avec $z' - z = \dfrac{1}{2}(x+y) + \mathrm{i} \times \dfrac{1}{2}(x+y) - x - \mathrm{i}y = -\dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{2} + \mathrm{i}(\dfrac{x}{2} - \dfrac{y}{2}) = -(\dfrac{x}{2} - \dfrac{y}{2}) + \mathrm{i}(\dfrac{x}{2} - \dfrac{y}{2})$

$= (\dfrac{x}{2} - \dfrac{y}{2})(-1+\mathrm{i})$

Donc $\dfrac{z'-z}{1+\mathrm{i}} = (\dfrac{x}{2} - \dfrac{y}{2}) \times \dfrac{-1+\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}} = (\dfrac{x}{2} - \dfrac{y}{2}) \times \dfrac{(-1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}{(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})} = (\dfrac{x}{2} - \dfrac{y}{2}) \times \dfrac{2\mathrm{i}}{2} = \mathrm{i}(\dfrac{x}{2} - \dfrac{y}{2})$

A partir de $\dfrac{-1+i}{1+i}$, on aurait pu aller un peu plus vite en factorisant le numérateur par i...

Donc $(\overrightarrow{\mathrm{O}A}, \overrightarrow{MM'}) = \mathrm{Arg}\left(\mathrm{i}(\dfrac{x}{2} - \dfrac{y}{2})\right)$

$M \neq M'$ donc (cf question 2) $x \neq y$, donc $\dfrac{x}{2} - \dfrac{y}{2}$ est un réel non nul.

Donc $\mathrm{i}(\dfrac{x}{2} - \dfrac{y}{2})$ est un imaginaire pur. Donc $\mathrm{Arg}\left(\mathrm{i}(\dfrac{x}{2} - \dfrac{y}{2})\right) = +\dfrac{\pi}{2}$ ou $-\dfrac{\pi}{2}$

Donc $(\overrightarrow{\mathrm{O}A}, \overrightarrow{MM'}) = +\dfrac{\pi}{2}$ ou $-\dfrac{\pi}{2}$

Donc, $\boxed{\text{pour tout point } M \text{ du plan tel que } M \neq M'\text{, les vecteurs } \overrightarrow{MM'} \text{ et } \overrightarrow{\mathrm{O}A} \text{ sont orthogonaux.}}$

www.ayoub-et-les-maths.com
ayoub.hajlaoui.scolaire@gmail.com