Aire d'un champ d'oliviers

Ayoub Hajlaoui

Au revoir, olivier. Au revoir, scarabée, fourmi.
Mon jargon des adieux n'est pas assez fourni.
Au revoir, dragons des cieux, soufflant sur la poussière !
Au revoir, rat des champs, rescapé de ma souricière !

Énoncé : (temps conseillé : 25 min)

En janvier 2015, un champ d'oliviers fait 20 kilomètres de long et 10 kilomètres de large. Chaque année entre 2015 et 2035, il perd 1 kilomètre de longueur et gagne 1 kilomètre de largeur. En quelle année son aire sera-t-elle maximale, et quelle sera alors cette aire ?

Correction :

C'est le genre d'exercice dont la difficulté réside plus dans le fait de traduire judicieusement l'énoncé de manière mathématique, afin d'utiliser les outils appropriés, plutôt que dans les calculs en eux-mêmes.

Au bout de x années écoulées depuis 2015, la longueur est $20 - x$, et sa largeur est $10 + x$. L'aire du champ est alors $A(x) = (20 - x)(10 + x)$.

Cette expression me permet-elle de savoir quand l'aire du champ est maximale ? Pas vraiment. Mais peut-être que sous forme canonique... Avant d'obtenir une telle forme, on va devoir développer.

En développant, on a $A(x) = 20 \times 10 + 20x - 10x - x \times x$ *(attention aux signes)*
D'où : $A(x) = -x^2 + 10x + 200$

Pour mettre $A(x)$ sous forme canonique, il faut d'abord factoriser par le coefficient devant x^2 (ici -1)

Donc $A(x) = -(x^2 - 10x - 200)$
Il s'agit maintenant de " compléter " $x^2 - 10x$ pour reconnaître une identité remarquable.

Donc $A(x) = -(x^2 - 2 \times x \times 5 - 200)$. *On peut obtenir $a^2 - 2ab + b^2$ en prenant $a = x$ et $b = 5$...*

Donc $A(x) = -(\underline{x^2 - 2 \times x \times 5 + 5^2} - 5^2 - 200)$
Je fais apparaître 5^2 parce que j'en ai besoin. Mais je suis en maths et rien n'est magique : si je veux ajouter 5^2, je dois le retrancher aussitôt, ce que j'ai fait.

Donc $A(x) = -[(x - 5)^2 - 225]$. Donc $\underline{A(x) = 225 - (x - 5)^2}$

$(x - 5)^2$ est un carré, donc forcément positif. Donc $A(x) \leq 225$ (puisqu'on prend 225 et qu'on lui enlève quelque chose de positif). De plus, en prenant $x = 5$, on a $A(5) = 225 - (5 - 5)^2 = 225 - 0 = 225$.

L'aire maximale du champ est donc atteinte $\boxed{\text{au bout de 5 ans, c'est-à-dire en janvier 2020}}$ et cette aire est égale à $\boxed{225 \text{ km}^2}$.

www.ayoub-et-les-maths.com
ayoub.hajlaoui.scolaire@gmail.com