Convergence uniforme d'une suite de fonctions

Ayoub Hajlaoui

Convergence uniforme, nous allons te prouver
mais en bonne et due forme, par calculs approuvés.

Énoncé : (niveau bac+2 / bac+3) temps conseillé : 25 min

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de fonctions définies sur $\mathbb{R}^+$ par : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}^+,\ f_n(x) = e^{-nx}\sin(nx)$
1) Étudier la convergence simple de la suite de fonctions (f_n) sur $\mathbb{R}^+$
2) Soit un réel $a > 0$. Étudier la convergence simple de la suite de fonctions (f_n) sur $[a\ ;\ +\infty[$
3) Étudier la convergence uniforme de la suite de fonctions (f_n) sur $\mathbb{R}^+$

Correction :

1) *Il s'agit tout simplement d'étudier, pour tout* $x \in \mathbb{R}^+$ *(l'ensemble sur lequel on demande de montrer la convergence simple),* $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)$

À première vue, le terme en exponentielle tend vers 0*, mais que faire du sinus ? Encadrons-le, pour pouvoir utiliser le théorème des gendarmes.*

$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R}^+,\ -1 \le \sin(nx) \le 1$. Donc $-e^{-nx} \le e^{-nx}\sin(nx) \le e^{-nx}$
(en multipliant tous les membres par $e^{-nx} > 0$)

Or : $\forall x > 0,\ \lim\limits_{n\to+\infty} e^{-nx} = \lim\limits_{n\to+\infty} -e^{-nx} = 0.$
Attention, je n'ai pas dit "$\forall x \in \mathbb{R}^+$*", car c'est faux pour* $x = 0$
Donc d'après le théorème des gendarmes : $\forall x > 0,\ \lim\limits_{n\to+\infty} e^{-nx}\sin(nx) = 0$
Autrement dit : $\forall x > 0,\ \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$
N'oublions pas de traiter le cas $x = 0$*...*

Pour $x = 0$: $e^{-n\times 0}\sin(n\times 0) = 1\times 0 = 0$ (donc le résultat obtenu précédemment pour $x > 0$ reste valable).

Donc : $\forall x \in \mathbb{R}^+,\ \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$

Donc la suite de fonction $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}^+$.

2) Soit f la fonction nulle sur $\mathbb{R}^+$ (limite simple de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trouvée précédemment)
Il va falloir s'intéresser à $\lim\limits_{n\to+\infty} \sup\limits_{x\in[a\ ;\ +\infty[} |f_n(x) - f(x)|$...

$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in [a\ ;\ +\infty[,\ |f_n(x) - f(x)| = |f_n(x)| = |e^{-nx}\sin(nx)| = |e^{-nx}||\sin(nx)|$
Donc $|f_n(x) - f(x)| \le e^{-nx}\times 1 = e^{-nx} \le e^{-na}$, par décroissance de la fonction $x \to e^{-nx}$ sur $[0\ ;\ a]$

Il s'ensuit donc : $\forall n \in \mathbb{N},\ \sup\limits_{x\in[a\ ;\ +\infty[} |f_n(x) - f(x)| \le e^{-na}$

On a donc : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \le \sup\limits_{x\in[a\ ;\ +\infty[} |f_n(x) - f(x)| \le e^{-na}$ avec $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{-na} = 0$ (car $a > 0$)

Donc d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n \to +\infty} \sup\limits_{x \in [a\ ;\ +\infty[} |f_n(x) - f(x)| = 0$

$\boxed{\text{Donc } (f_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge uniformément sur } [a\ ;\ +\infty[\text{ vers la fonction nulle } f.}$

3) *Si on veut montrer la convergence uniforme, on doit procéder comme précédemment. Mais on voit qu'on ne pourra plus majorer le sup par quelque chose qui tend vers* 0*, vu que* $e^{-n\times 0} = 1$*...*

Dans ce cas, peut-être faut-il montrer au contraire qu'il n'y a pas convergence uniforme sur $[0\ ;\ +\infty[$ *... Une manière classique de le faire est la suivante :*

On étudie les variations de chaque fonction $g_n = |f_n - f|$ *pour trouver son sup (qui ne dépend que de n) et on montre que la suite des sup ainsi obtenus ne tend pas vers* 0*.*

Mais si on est inspiré, on peut dans certains cas, s'épargner cette étude de variations : il suffit de trouver une suite (a_n) *telle que* $\lim\limits_{n \to +\infty} |f_n(a_n) - f(a_n)| \neq 0$

(Cela implique bien que $\lim\limits_{n \to +\infty} \sup\limits_{x \in [0\ ;\ +\infty[} |f_n(x) - f(x)| \neq 0$*, vu que* $|f_n(a_n) - f(a_n)| \leq \sup\limits_{x \in [0\ ;\ +\infty[} |f_n(x) - f(x)|$*)*

Vu l'expression de f_n*, il est judicieux d'essayer de voir ce qui se passe avec* $a_n = \dfrac{1}{n}$

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ f_n(\frac{1}{n}) = e^{-n\times\frac{1}{n}} \sin(n \times \dfrac{1}{n}) = e^{-1}\sin(1)$. Donc :

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ |f_n(\frac{1}{n}) - f(\frac{1}{n})| = |f_n(\frac{1}{n})| = e^{-1}\sin(1)$ *(n'oublions pas que* f *est la fonction nulle)*

Par définition du sup, on a donc : $\sup\limits_{x \in [0\ ;\ +\infty[} |f_n(x) - f(x)| \geq e^{-1}\sin(1)$ avec $e^{-1}\sin(1) > 0$

On n'a donc pas : $\lim\limits_{n \to +\infty} \sup\limits_{x \in [a\ ;\ +\infty[} |f_n(x) - f(x)| = 0$

$\boxed{\text{Donc } (f_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ ne converge pas uniformément sur } [0\ ;\ +\infty[.}$

www.ayoub-et-les-maths.com
ayoub.hajlaoui.scolaire@gmail.com