Inéquation du second degré

Ayoub Hajlaoui

Enquêteur résolu, l'inconnue a signé !
Par peur de l'absolu, divisons pour régner.

Énoncé : (temps conseillé : 25 min)

Résoudre l'inéquation suivante dans $\mathbb{R}$, de deux façons différentes : $(x-5)^2 > 16$

Correction :

A ce stade de vos études, le premier réflexe que vous devriez avoir face à ce type d'inéquation est de tout faire passer du même côté et ensuite de factoriser pour faire apparaître un produit de termes simples d'un côté, et zéro de l'autre...

Première façon :

$$\begin{aligned}(x-5)^2 > 16 \iff (x-5)^2 - 16 > 0 &\iff (x-5)^2 - 4^2 > 0 \quad \text{(identité remarquable)}\\ &\iff (x-5-4)(x-5+4) > 0\\ &\iff (x-9)(x-1) > 0\\ &\iff (x-9) \text{ et } (x-1) \text{ sont non nuls, de même signe}\end{aligned}$$

De même signe car c'est la seule manière d'obtenir un produit positif, non nuls car le produit est strictement positif et donc non nul.

$$\text{Donc } (x-5)^2 > 16 \iff \begin{cases} x-9 > 0 \\ x-1 > 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x-9 < 0 \\ x-1 < 0 \end{cases}$$

$$\text{Donc } (x-5)^2 > 16 \iff \begin{cases} x > 9 \\ x > 1 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x < 9 \\ x < 1 \end{cases}$$

$$\text{Donc } (x-5)^2 > 16 \iff x > 9 \quad \text{ou} \quad x < 1$$

En effet, dans le premier système, la condition $x > 1$ est déjà contenue dans la condition $x > 9$ (si $x > 9$, alors forcément $x > 1$). De même, dans le second système, la condition $x < 9$ est déjà contenue dans la condition $x < 1$.

$\boxed{\text{L'ensemble des solutions de l'inéquation } (x-5)^2 > 16 \text{ est donc }]-\infty\,;\,1[\,\cup\,]9\,;\,+\infty[.}$

Seconde façon :

Si nous ne commençons pas par passer 16 de l'autre côté, que pourrions-nous faire d'autre ? Il y a un carré dans le membre de gauche...

La fonction racine est strictement croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$, avec $(x-5)^2$ et 16 dans cet intervalle (le premier étant un carré donc positif).

Souvenez-vous, quand une fonction est croissante sur un ensemble, on peut l'appliquer à deux membres d'une inégalité (compris dans cet ensemble) sans changer le sens de l'inégalité. De même, si elle est décroissante sur cet ensemble, on peut l'appliquer à deux membres d'une inégalité (compris dans cet ensemble) en changeant le sens de l'inégalité.

Donc : $(x-5)^2 > 16 \iff \sqrt{(x-5)^2} > \sqrt{16} \iff \sqrt{(x-5)^2} > 4$

Et là, beaucoup d'entre vous seront tentés de remplacer $\sqrt{(x-5)^2}$ par $(x-5)$. Étourderie classique. Pour un nombre réel A donné, $\sqrt{A^2}$ n'est pas nécessairement égal à A. Calculez par exemple $\sqrt{(-9)^2} = \sqrt{81}$. Vous trouvez 9 et non -9.
Ce qu'il faut donc retenir, c'est que $\sqrt{A^2} = A$ si A est positif, et $-A$ si A est négatif.
Autrement dit, on a toujours : $\sqrt{A^2} = |A|$ (valeur absolue)
Par contre, on a bien, quel que soit A : $\left(\sqrt{A}\right)^2 = A$ (vu que dans ce cas, A est positif ; sinon, on n'aurait pas pu écrire sa racine).

Donc : $(x-5)^2 > 16 \iff |x-5| > 4$

Deux cas de figure sont alors à traiter pour nous débarrasser de la valeur absolue (divisons pour régner...) :
- *Soit $(x-5) \geq 0$, et dans ce cas $|x-5| = x-5$*
- *Soit $(x-5) < 0$, et dans ce cas $|x-5| = -(x-5) = 5-x$*

Si $(x-5) \geq 0$, c'est-à-dire <u>si $x \geq 5$</u>, l'inéquation $|x-5| > 4$ devient : $x-5 > 4$, c'est-à-dire $x > 9$. A cette condition, on n'oublie pas d'ajouter la condition $x \geq 5$, qui correspond à notre premier cas de figure. Ici, elle n'ajoute rien (puisque si $x > 9$, on a forcément $x \geq 5$), mais il ne faut pas l'oublier en général.
<u>Tous les réels $x > 9$ sont donc solutions de l'inéquation de l'énoncé.</u>

Si $(x-5) < 0$, c'est-à-dire <u>si $x < 5$</u>, l'inéquation $|x-5| > 4$ devient : $5-x > 4$, c'est-à-dire $5-4 > x$, ou encore $x < 1$. A cette condition, on n'oublie pas d'ajouter la condition $x < 5$, qui correspond à ce second cas de figure. Là non plus, elle n'ajoute rien (puisque si $x < 1$, on a forcément $x < 5$).
<u>Tous les réels $x < 1$ sont donc solutions de l'inéquation de l'énoncé.</u>

Et il n'y a pas d'autres solutions car on a traité tous les cas de figure.

On retrouve donc le résultat obtenu avec la première méthode :

$\boxed{\text{L'ensemble des solutions de l'inéquation } (x-5)^2 > 16 \text{ est donc }]-\infty\ ;\ 1[\ \cup\ ]9\ ;\ +\infty[.}$