Introduction au raisonnement par récurrence

Ayoub Hajlaoui

Il faisait beau hier. Il fait beau aujourd'hui.
Ce temps bien temporaire en erreur nous induit.

Énoncé : (temps conseillé : 55 min)

Soit un nombre réel x tel que $x + \frac{1}{x}$ est un entier relatif $(x + \frac{1}{x} \in \mathbb{Z})$.

1) Montrer que $x^2 + \frac{1}{x^2}$ est aussi un entier relatif. *Indication : on pourra s'intéresser à* $(x + \frac{1}{x})^2$

2) Après avoir montré que $x^2 + \frac{1}{x^2}$ était un entier relatif, Sami réussit à montrer que $x^3 + \frac{1}{x^3}$ aussi est un entier relatif.
a) Il en conclut que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la propriété P_n : "$x^n + \frac{1}{x^n}$ est un entier relatif" est vraie. Que pensez-vous de son raisonnement ?
b) Nabil n'est pas d'accord avec le raisonnement de Sami. Il veut lui donner un exemple d'une propriété Q_n vraie pour les premiers n mais fausse à partir d'un certain rang. Donnez-lui un exemple d'une telle propriété.

3) Pour montrer qu'une propriété P_n est vraie pour tout entier naturel n, on peut utiliser un raisonnement par récurrence. Il consiste en trois étapes :
- il faut d'abord montrer que P_0 est vraie (c'est-à-dire que la propriété est vraie pour $n = 0$). C'est ce qu'on appelle l'initialisation.
- il faut ensuite montrer que si pour un certain entier n, P_n est vraie, alors P_{n+1} est vraie aussi. C'est ce qu'on appelle l'hérédité. Elle permet de s'assurer que la véracité de la propriété est conservée en passant d'un rang au rang suivant.
- on peut enfin en conclure que P_n est vraie pour tout entier naturel n.

a) Soit q un réel différent de 1. Pour tout entier naturel n, on note S_n la somme $S_n = 1 + q + q^2 + ... + q^n$. (Ainsi, $S_0 = 1,\ S_1 = 1 + q,\ S_2 = 1 + q + q^2$ etc...). En utilisant un raisonnement par récurrence, montrer que pour tout entier naturel n, la propriété P_n : " $S_n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$ " est vraie.
b) Pour tout entier naturel n, on note A_n la somme $A_n = 0 + 1 + 2 + ... + n$. (Ainsi, $A_0 = 0,\ A_1 = 1,\ A_2 = 3$ etc...) En utilisant un raisonnement par récurrence, montrer que pour tout entier naturel n, $A_n = \frac{n(n+1)}{2}$

Correction :

1) Vu que $x + \frac{1}{x}$ est un entier relatif, $(x + \frac{1}{x})^2 = (x + \frac{1}{x})(x + \frac{1}{x})$ est aussi un entier relatif (produit d'un entier relatif par lui-même).

Par ailleurs, $(x + \frac{1}{x})^2 = x^2 + 2 \times x \times \frac{1}{x} + (\frac{1}{x})^2 = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2}$

Ne pas perdre de vue notre objectif. Ce qui nous intéresse, c'est $x^2 + \frac{1}{x^2}$

On a donc : $x^2 + \frac{1}{x^2} = (x + \frac{1}{x})^2 - 2$, où $(x + \frac{1}{x})^2$ est un entier relatif, et -2 aussi.

Par addition de deux entiers relatifs, $\boxed{x^2 + \frac{1}{x^2} \text{ est bien un entier relatif.}}$

2) a) Sami a observé que la propriété P_n était vraie :

- pour $n = 0$: $x^0 + \frac{1}{x^0} = 1 + \frac{1}{1} = 2$, qui est entier
- pour $n = 1$: $x^1 + \frac{1}{x^1} = x + \frac{1}{x}$, qui est entier d'après l'énoncé
- pour $n = 2$: d'après la question précédente
- pour $n = 3$: Sami a réussi à le montrer d'après l'énoncé

Mais le fait que la propriété soit vraie pour les premiers entiers naturels ne garantit absolument pas qu'elle continuera d'être vraie pour les suivants.

Si je vous dis que j'ai traversé 10 fois au feu rouge sans accident, ça ne me garantit absolument pas que ça continuera indéfiniment...

Ce qui est intéressant avec cette propriété P_n de l'énoncé, c'est qu'en fait, il se trouve qu'elle est vraie pour tout entier naturel n (mais la preuve est un peu difficile pour la Terminale). Vous pourriez donc me dire : " ben tu vois, au final, Sami a raison. "

Ben non, Sami a tort. En mathématiques, le raisonnement compte au moins autant que le résultat. Parvenir à une conclusion juste avec un raisonnement complètement faux ne nous intéresse pas. Vous vous en êtes déjà certainement rendu compte dans la correction de vos copies.

2) b) Par exemple, prenons tout simplement $\boxed{Q_n \ : \ " \ n < 5 \ ".}$

Cette propriété est vraie pour $n = 0$, pour $n = 1$, pour $n = 2$, pour $n = 3$, et pour $n = 4$ (car tous ces entiers sont strictement inférieurs à 5). Mais elle n'est certainement pas vraie pour tout entier n, puisqu'elle est clairement fausse à partir de $n = 5$.

Un exemple aussi simple vous montre à quel point il est grossier de conclure à la véracité d'une propriété pour tout entier naturel juste parce qu'on a vu qu'elle était vraie pour les premiers.

3) a) *L'énoncé précise q différent de* 1 *de telle sorte qu'on puisse diviser par* $1 - q$ *(qui ne risque pas d'être nul, du coup...)*

Montrons par récurrence que **pour tout** entier naturel n, la propriété P_n : " $S_n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$ " est vraie :

Initialisation : $S_0 = 1$ et $\frac{1 - q^{0+1}}{1 - q} = \frac{1 - q}{1 - q} = 1$. Donc $S_0 = \frac{1 - q^{0+1}}{1 - q}$, c'est-à-dire que $\boxed{P_0 \text{ est vraie}}$.

Hérédité : Si **pour un certain** n, P_n est vraie, c'est-à-dire si $S_n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$, on a alors :

$S_{n+1} = 1 + q + q^2 + ... + q^{n+1} = (1 + q + q^2 + ... + q^n) + q^{n+1} = S_n + q^{n+1}$

Comme $S_n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$ *(c'est ce qu'on appelle l'hypothèse de récurrence)*, on aboutit à :

$S_{n+1} = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} + q^{n+1} = \frac{1 - q^{n+1} + q^{n+1}(1 - q)}{1 - q}$ *(en mettant sous le même dénominateur)*

Donc $S_{n+1} = \frac{1 - q^{n+1} + q^{n+1} - q^{n+2}}{1 - q} = \frac{1 - q^{n+2}}{1 - q} = \frac{1 - q^{(n+1)+1}}{1 - q}$

Autrement dit, la propriété P_{n+1} est vraie.

La propriété P_{n+1}, c'est la propriété P_n mais en remplaçant n par $n + 1$

On a donc montré l'hérédité, c'est-à-dire : $\boxed{P_n \Longrightarrow P_{n+1}}$

Conclusion : le principe de raisonnement par récurrence nous permet de conclure ce qui suit :

$$\boxed{\text{Pour tout entier naturel } n, \text{ la propriété } P_n \ : \ " \ S_n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \ " \text{ est vraie.}}$$

On retrouve la formule de la somme des $(n + 1)$ *premiers termes consécutifs d'une suite géométrique de raison q et de premier terme* 1*...*

Voilà ce qui manquait à Sami tout à l'heure. Ce qu'il a fait correspond à une initialisation (même s'il a regardé non pas le premier mais les premiers rangs), mais il manquait l'étape d'hérédité.

3) b) Montrons par récurrence que **pour tout** entier naturel n, la propriété P_n : " $A_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ " est vraie :

Initialisation : $A_0 = 0$ et $\dfrac{0(0+1)}{2} = \dfrac{0}{2} = 0$. Donc $A_0 = \dfrac{0(0+1)}{2}$, c'est-à-dire que $\boxed{P_0 \text{ est vraie}}$.

Hérédité : Si **pour un certain** n, P_n est vraie, c'est-à-dire si $A_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$, on a alors :

$A_{n+1} = 0 + 1 + ... + (n+1) = (0 + 1 + ... + n) + (n+1) = A_n + (n+1)$

Comme $A_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ *(hypothèse de récurrence)*, on aboutit à :

$A_{n+1} = \dfrac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \dfrac{n(n+1) + 2(n+1)}{2}$ *(en mettant sous le même dénominateur)*

Donc $A_{n+1} = \dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$ *(en factorisant par* $(n+1)$ *au numérateur*

Donc $A_{n+1} = \dfrac{(n+1)((n+1)+1)}{2}$ Autrement dit, la propriété P_{n+1} est vraie.

On a donc montré l'hérédité, c'est-à-dire : $\boxed{P_n \Longrightarrow P_{n+1}}$

Conclusion : le principe de raisonnement par récurrence nous permet de conclure ce qui suit :

$\boxed{\text{Pour tout entier naturel } n\text{, la propriété } P_n \text{ : " } A_n = \dfrac{n(n+1)}{2} \text{ " est vraie.}}$

On retrouve la formule de la somme des $(n+1)$ *premiers termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison* 1 *et de premier terme* 0...

www.ayoub-et-les-maths.com
ayoub.hajlaoui.scolaire@gmail.com