Polynôme, dérivée, puissance

Ayoub Hajlaoui

Je t'aurai, polynôme, de force ou de gré !
Je t'ôterai ton heaume, pour mieux voir ton degré.

Énoncé : (temps conseillé : 30 min)

Soit n un entier naturel non nul. Montrer qu'il existe un unique polynôme P_n tel que :
$\forall x \in \mathbb{R},\ P_n(x) - P_n'(x) = x^n$
Déterminer ce polynôme.

Correction :

Tout d'abord, demandons-nous quel degré devrait avoir un polynôme P_n vérifiant une telle condition. On rappelle que le degré d'un polynôme est la puissance de x la plus élevée dans son expression. Par exemple, le degré du polynôme $x \to x^3 - 2x^2 + 1$ est 3. Le degré d'un polynôme constant est donc 0, sauf dans le cas du polynôme nul, dont le degré est souvent fixé à -1 ou $-\infty$ par convention.

Soit un polynôme P_n vérifiant une telle égalité. Si son degré est $\deg(P_n)$, alors sa dérivée P_n' est aussi un polynôme, de degré $\deg(P_n) - 1$. *(puisque le terme de plus haut degré perd un degré en dérivant)*

La somme d'un polynôme de degré d et d'un polynôme de degré $d - 1$ est un polynôme de degré d (car le terme de plus haut degré est évidemment apporté par le premier polynôme, sans pouvoir être annulé par le second).

Le polynôme $P_n - P_n'$ est donc nécessairement de degré $\deg(P_n)$. Or, la condition imposée par l'énoncé implique que $P_n - P_n'$ est de degré n. Donc $\deg(P_n) = n$. Autrement dit, P_n est nécessairement de degré n.

On peut donc dire qu'il existe n+1 réels $a_0, a_1, .., a_n$ tels que :
$\forall x \in \mathbb{R},\ P_n(x) = a_n x^n + a_{n_1} x^{n-1} + ...a_1 x + a_0 = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$
avec $a_n \neq 0$ (sinon, P_n serait de degré strictement inférieur à n)

On aurait donc (en dérivant terme à terme) :
$P_n'(x) = n a_n x^{n-1} + (n-1) a_{n-1} x^{n-2} + ... + a_1 = \sum_{k=1}^{n} k a_k x^{k-1} = \sum_{k'=0}^{n-1} (k'+1) a_{k'+1} x^{k'}$
La dernière somme est obtenue en effectuant le changement de variable $k' = k - 1$ dans la précédente.

Donc $P_n'(x) = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) a_{k+1} x^k$
Que la variable muette s'appelle k ou k', ça ne change rien, je l'avais appelée k' auparavant pour que vous puissiez bien voir le changement de variable.

On a alors, pour tout réel x :
$P_n(x) - P_n'(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k - \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) a_{k+1} x^k = \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k + a_n x^n - \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) a_{k+1} x^k$
J'ai séparé la première somme (en mettant le dernier terme à part) pour qu'elle finisse à $n-1$ comme la seconde somme, afin de pouvoir les soustraire terme à terme.

Donc $P_n(x) - P_n'(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \big((k+1) a_{k+1} - a_k\big) x^k + a_n x^n$

En reprenant l'égalité de l'énoncé, on obtient alors, pour tout réel x :
$\sum_{k=0}^{n-1}\left((k+1)a_{k+1}-a_k\right)x^k+a_nx^n=x^n$
Ceci étant vrai pour tout réel x, c'est une égalité entre deux polynômes...

Deux polynômes sont égaux si et seulement si leurs coefficients sont égaux. Le seul coefficient non nul du polynôme de droite est celui devant x^n, c'est-à-dire 1. Dans le polynôme de gauche, le coefficient devant x^n est a_n.

On a donc : $\begin{cases} a_n = 1 \\ \forall k\in\{0,1,...,n-1\},\ (k+1)a_{k+1}-a_k = 0\end{cases}$

Autrement dit : $\begin{cases} a_n = 1 \\ \forall k\in\{0,1,...,n-1\},\ a_k = (k+1)a_{k+1}\end{cases}$

En partant de $\underline{a_n=1}$, on a ensuite (en prenant $k=n-1$ dans la seconde ligne du système) : $a_{n-1}=na_n$, c'est-à-dire $\underline{a_{n-1}=n}$ (puisqu'on sait que $a_n=1$)

En prenant $k=n-2$, on a $a_{n-2}=(n-1)a_{n-1}$. Donc $\underline{a_{n-2}=(n-1)n}$.
Ensuite, $\underline{a_{n-3}=(n-2)(n-1)n}$ ...

Par récurrence immédiate, on obtient l'expression générale suivante pour a_k :
$a_k=\left(k+1\right)\left(k+2\right)\times...\times n$

Autrement dit, $\boxed{a_k=\dfrac{n!}{k!}}$

P_n est alors défini comme suit : $\forall x\in\mathbb{R},\ P_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\dfrac{n!}{k!}x^k$

Nous avons raisonné par analyse pour trouver que la condition de l'énoncé implique cette expression pour P_n. Il ne nous reste plus qu'à montrer (plutôt vérifier) que le polynôme P_n ainsi trouvé vérifie bien l'égalité de l'énoncé (synthèse).

Avec ce polynôme P_n ainsi trouvé :
$P_n'(x)=\sum_{k=1}^{n}k\times\dfrac{n!}{k!}x^{k-1}=\sum_{k=1}^{n}\dfrac{n!}{(k-1)!}x^{k-1}=\sum_{k=0}^{n-1}\dfrac{n!}{k!}x^k$ (par changement de variable)
Donc $P_n(x)-P_n'(x)=\sum_{k=0}^{n}\dfrac{n!}{k!}x^k-\sum_{k=0}^{n-1}\dfrac{n!}{k!}x^k$
Tout se simplifie sauf le terme correspondant à $k=n$ dans la première somme.

Donc $P_n(x)-P_n'(x)=\dfrac{n!}{n!}x^n=x^n$

En conclusion, il existe un unique polynôme P_n tel que : $\forall x\in\mathbb{R},\ P_n(x)-P_n'(x)=x^n$

Ce polynôme est défini par : $\boxed{P_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\dfrac{n!}{k!}x^k}$

www.ayoub-et-les-maths.com
ayoub.hajlaoui.scolaire@gmail.com