Résoudre un système de congruences

Ayoub Hajlaoui

Écris ton avenir aux bras de ceux qui t'aiment ;
Mais pour y parvenir, joue-toi de ce système.

Énoncé : (temps conseillé : 20 min)

Résoudre le système suivant dans $\mathbb{Z}$: $\begin{cases} \alpha \equiv -2 \;[3] \\ \alpha \equiv \;\;5 \;[11] \end{cases}$

Correction :

Remarquons tout d'abord, pour l'anecdote, que la première ligne pourrait s'écrire $\alpha \equiv 1 \;[3]$ *puisque* $1 = -2 + 3$

Maintenant, comment faire pour résoudre un tel système ? Si on ne voit pas quoi faire avec l'écriture en congruences, peut-être faut-il transformer cette écriture en quelque chose de plus intuitif pour nous...

Ce système peut se réécrire ainsi : il existe deux entiers relatifs x et y tels que $\begin{cases} \alpha = 3x - 2 \\ \alpha = 11y + 5 \end{cases}$

Résoudre ce système revient donc à résoudre l'équation diophantienne suivante :
$3x - 2 = 11y + 5$, c'est-à-dire

$$3x - 11y = 7 \tag{1}$$

Et ça, c'est une équation qu'on sait bien résoudre...

Une solution particulière (obtenue par tâtonnement) de l'équation (1) est $\begin{cases} x = 6 \\ y = 1 \end{cases}$, puisque $3 \times 6 - 11 \times 1 = 7$

En reprenant (1) et cette solution particulière, on a alors : $\begin{cases} 3x - 11y = 7 & \text{(L1)} \\ 3 \times 6 - 11 \times 1 = 7 & \text{(L2)} \end{cases}$

La soustraction (L1) - (L2) donne : $3(x - 6) - 11(y - 1) = 0$

Autrement dit, $3(x - 6) = 11(y - 1)$. Donc 11 est un diviseur de $3(k - 6)$.
Ben oui, vu que lorsque vous divisez $3(x - 6)$ *par* 11*, vous obtenez un entier, en l'occurrence* $y - 1$*...*

Or, 3 et 11 sont premiers entre eux. Donc d'après le théorème de Gauss, 11 est en fait un diviseur de $x - 6$ (donc $x - 6$ est un multiple de 11). Autrement dit, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x - 6 = 11k$.
Donc il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\underline{x = 11k + 6}$.

On aurait pu commencer par y *au lieu de* x*, en remarquant que* 3 *est un diviseur de* $11(y - 1)$*. Mais maintenant qu'on l'a fait pour* x*, on ne va pas reprendre le même procédé, parce que ça nous donnerait une expression de* y *en fonction d'un* k' *qui n'a aucune raison d'être égal à* k*. Faisons plus simple...*

En injectant $x-6=11k$ (obtenu précédemment) dans l'équation $3(x-6)=11(y-1)$, on obtient : $3\times 11k = 11(y-1)$. Autrement dit, $3k = y-1$.
Donc $y = 3k+1$.
Réciproquement, on vérifie aisément que pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $x = 11k+6$ et $y = 3k+1$ sont solutions de (1).

Pour revenir à notre système initial, on reprend $\alpha = 3x-2$ et on remplace x...
Les solutions sont les α de la forme $\alpha = 3(11k+6)-2 = 33k+16$
On aurait pu utiliser y au lieu de x : ça donne les α de la forme $\alpha = 11(3k+1)+5 = 33k+16$

En conclusion, $\boxed{\text{l'ensemble des solutions du système est donc } S = \{33k+16,\ k \in \mathbb{Z}\}}$

www.ayoub-et-les-maths.com
ayoub.hajlaoui.scolaire@gmail.com