Trigonométrie, logarithme et intégrales

Ayoub Hajlaoui

Cos, ln, et sinus dans ce train de l'horreur !
C'est pour qu'au terminus, ils vous fassent moins peur.

Énoncé : (temps conseillé : 45 min)

Soient f_1 et g_1 les fonctions définies sur $]0\ ;\ +\infty[$ par
$g_1(t) = t\cos(\ln(t))$ et $f_1(t) = \cos(\ln(t)) - \sin(\ln(t))$

1) Montrer que g_1 est une primitive de f_1.

2) De même, trouver une primitive g_2 de la fonction f_2 définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par
$f_2(t) = \cos(\ln(t)) + \sin(\ln(t))$

3) En déduire les valeurs de $\displaystyle\int_1^2 \cos(\ln(t))\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_1^2 \sin(\ln(t))\,\mathrm{d}t$

4)a) Justifier que pour tout réel t de l'intervalle $[1, 2]$, $\cos(\ln(t)) \geq 0$ et $\sin(\ln(t)) \geq 0$.
b) En déduire une interprétation graphique du résultat de la 3).

Correction :

1) *Il suffit tout simplement de dériver g_1 et de retrouver f_1...*

g_1 est dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$ par composition et produit de fonctions dérivables.

On dérive g_1 comme un produit. L'une des fonctions de ce produit est un chouia plus compliquée à dériver...

$\forall t \in]0\ ;\ +\infty[\ ,\ g_1'(t) = 1 \times \cos(\ln(t)) + t \times \dfrac{1}{t} \times [-\sin(\ln(t))] = \cos(\ln(t)) - \sin(\ln(t)) = f_1(t)$

Donc $\boxed{g_1 \text{ est une primitive de } f_1.}$

2) *Quelle idée pour une primitive de f_2 ? Sachant que la seule différence avec f_1, c'est le signe $-$ qui devient $+$... Mais c'est la dérivation du cosinus qui donnait ce signe $-$... Et si maintenant, on dérivait du sinus ?*

Soit g_2 la fonction définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par $g_2(x) = t\sin(\ln(t))$.

g_2 est dérivable pour les mêmes raisons que g_1.

$\forall t \in]0\ ;\ +\infty[\ ,\ g_2'(t) = 1 \times \sin(\ln(t)) + t \times \dfrac{1}{t} \times \cos(\ln(t)) = \sin(\ln(t)) + \cos(\ln(t)) = f_2(t)$

Donc $\boxed{g_2 \text{ est une primitive de } f_2.}$

3) *En déduire... En déduire... A priori, si on nous dit ça, c'est qu'on ne peut pas calculer directement les valeurs de ces intégrales. Avons-nous des primitives de $t \to \cos(ln(t))$ et $t \to \sin(ln(t))$ Non, mais nous avons des primitives de f_1 et f_2. Et si nous arrivions à exprimer $\cos(ln(t))$ et $\sin(ln(t)$ en fonction de $f_1(t)$ et $f_2(t)$?*

$\forall t \in]0\ ;\ +\infty[\ , f_1(t) + f_2(t) = \cos(\ln(t)) - \sin(\ln(t)) + \cos(\ln(t)) + \sin(\ln(t))$

Donc $f_1(t) + f_2(t) = 2\cos(\ln(t))$

Donc $\cos(\ln(t)) = \dfrac{f_1(t) + f_2(t)}{2}$. Donc $\displaystyle\int_1^2 \cos(\ln(t))\,\mathrm{d}t = \int_1^2 \frac{f_1(t) + f_2(t)}{2}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{g_1(t) + g_2(t)}{2}\right]_1^2$

$= \dfrac{1}{2}\big[t\cos(\ln(t)) + t\sin(\ln(t))\big]_1^2 = \dfrac{1}{2}\big(2\cos(\ln(2)) + 2\sin(\ln(2)) - \cos(\ln(1)) - \sin(\ln(1))\big)$

$= \dfrac{1}{2}\big(2\cos(\ln(2)) + 2\sin(\ln(2)) - \cos(0) - \sin(0)\big) = \cos(\ln(2)) + \sin(\ln(2)) - \dfrac{1}{2}$

Donc $\boxed{\displaystyle\int_1^2 \cos(\ln(t))\,\mathrm{d}t = \cos(\ln(2)) + \sin(\ln(2)) - \frac{1}{2}}$

De même, $\forall t \in\,]0\,;\,+\infty[$, $f_2(t) - f_1(t) = \cos(\ln(t)) + \sin(\ln(t)) - \cos(\ln(t)) - \sin(\ln(t))$

Donc $f_2(t) - f_1(t) = 2\sin(\ln(t))$

Donc $\sin(\ln(t)) = \dfrac{f_2(t) - f_1(t)}{2}$. Donc $\displaystyle\int_1^2 \sin(\ln(t))\,\mathrm{d}t = \int_1^2 \frac{f_2(t) - f_1(t)}{2}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{g_2(t) - g_1(t)}{2}\right]_1^2$

$= \dfrac{1}{2}\big[t\sin(\ln(t)) - t\cos(\ln(t))\big]_1^2 = \dfrac{1}{2}\big(2\sin(\ln(2)) - 2\cos(\ln(2)) - \sin(\ln(1)) + \cos(\ln(1))\big)$

(attention aux signes dans ce genre de calcul...)

$= \dfrac{1}{2}\big(2\sin(\ln(2)) - 2\cos(\ln(2)) - \sin(0) + \cos(0)\big) = \sin(\ln(2)) - \cos(\ln(2)) + \dfrac{1}{2}$

Donc $\boxed{\displaystyle\int_1^2 \sin(\ln(t))\,\mathrm{d}t = \sin(\ln(2)) - \cos(\ln(2)) + \frac{1}{2}}$

4)a) *Quant t varie entre 1 et 2, entre quoi et quoi $\ln(t)$ varie-t-il ?*

La fonction ln est strictement croissante sur $]0\,;\,+\infty[$ (donc a fortiori sur $[1\,;\,2]$)

Donc : $\forall t \in [1\,;\,2],\ \ln(1) \leq \ln(t) \leq \ln(2)$

Donc : $\forall t \in [1\,;\,2],\ 0 \leq \ln(t) \leq \ln(2)$

Nous savons que les fonctions sinus et cosinus sont toutes les deux positives sur $[0\,;\,\frac{\pi}{2}]$.. Et si t avait la bonne idée d'être dans cet intervalle ? Comparons $\ln(2)$ et $\frac{\pi}{2}$ pour en avoir le cœur net.

$\ln(2) < \dfrac{\pi}{2}$ *(soit à la calculatrice, soit en constatant, par croissance de ln, $\ln(2) < \ln(e) = 1 < \frac{\pi}{2}$)*

Donc : $\forall t \in [1\,;\,2],\ 0 \leq \ln(t) \leq \dfrac{\pi}{2}$. Autrement dit, $\ln(t) \in [0\,;\,\frac{\pi}{2}]$

Or : $\forall x \in [0\,;\,\frac{\pi}{2}],\ \sin(x) \geq 0$ et $\cos(x) \geq 0$

Donc : $\boxed{\forall t \in [1\,;\,2],\ \cos(\ln(t)) \geq 0 \text{ et } \sin(\ln(t)) \geq 0}$

4)b) *Interprétation graphique dans un exercice sur des intégrales. C'est téléphoné, non ?*

D'après 4)a), les fonctions $t \to \cos(\ln(t))$ et $t \to \sin(\ln(t))$ sont positives sur $[1\,;\,2]$. Leurs intégrales entre -1 et 1 correspondent donc aux aires respectives délimitées par :

- leurs courbes respectives
- la droite des abscisses
- les droites d'équations $x = 1$ et $x = 2$

On n'aurait pas pu conclure ainsi si les fonctions n'étaient pas positives. Si elles étaient négatives, les intégrales correspondraient à l'opposé des aires. Si elles changeaient de signe, ce serait plus compliqué à décrire (certaines aires comptées positivement, d'autres comptées négativement).