Une limite pas intuitive

Ayoub Hajlaoui

Ca ne tend pas vers 1, malgré nos préjugés,
Car l'exposant malin en changeant veut piéger.

Énoncé : (temps conseillé : 30 min)

On cherche à déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} (1+\frac{1}{n})^n$

1) Donner une conjecture quant au résultat.

2) Démontrer que pour tout entier naturel $n > 0$, on a : $(1+\frac{1}{n})^n = \exp\left(n\ln(1+\frac{1}{n})\right)$, où exp est la fonction exponentielle.

3) Démontrer : $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$

4) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} n\ln(1+\frac{1}{n})$

5) Conclure. Discuter la différence entre la conjecture formulée en 1) et le résultat obtenu.

Correction :

1) $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 1+\frac{1}{n} = 1$. Or, pour tout entier naturel n, $1^n = 1$.

$\boxed{\text{On pourrait donc conjecturer } \lim\limits_{n\to+\infty} (1+\frac{1}{n})^n = 1.}$

2) *N'oubliez pas, quand on vous demande de démontrer une égalité A = B, vous pouvez partir de A et essayer d'arriver à B... Mais vous pouvez aussi partir de B et essayer d'arriver à A ! A vous de voir ce qui est le plus simple.*

$\forall n > 0,\ \exp\left(n\ln(1+\frac{1}{n})\right) = \exp\left(\ln([1+\frac{1}{n}]^n)\right)$ *en utilisant la formule* $\ln(a^b) = b\ln(a)$ *pour* $a > 0$

Donc $\boxed{\exp\left(n\ln(1+\frac{1}{n})\right) = (1+\frac{1}{n})^n}$ *tout simplement parce que* $\exp\left(\ln(x)\right) = x$ *pour* $x > 0$

3) *Vous avez probablement vu cette limite en cours. Mais comme on nous demande de la démontrer, démontrons. Essayons de nous rappeler de la clé de la démonstration abordée en cours... Une histoire de nombre dérivé...*

Soit f la fonction définie sur $]-1\,;\,+\infty[$ par $f(x) = \ln(1+x)$
Pourquoi $]-1\,;\,+\infty[$ *? Pour que ce qu'il y a à l'intérieur de* $\ln(.)$ *soit strictement positif.*

f est dérivable sur $]-1\,;\,+\infty[$ et : $\forall x \in]-1\,;\,+\infty[,\ f'(x) = \frac{1}{1+x}$

Le nombre dérivé de f en 0 est donc $f'(0) = \frac{1}{1+0} = 1$

On a aussi, par définition du nombre dérivé : $f'(0) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)-\ln(1+0)}{x}$

$= \lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$. On peut donc en conclure : $\boxed{\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1}$

4) *Vite, trouvons le lien entre cette question et la précédente... Il s'agissait d'une limite en 0, il s'agit maintenant d'une limite en* $+\infty$.

En faisant une comparaison plus attentive, on peut remarquer que x a laissé place à $\frac{1}{n}$ ...

Posons $x = \frac{1}{n}$. Lorsque n tend vers $+\infty$, x tend vers 0.

On a alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} n\ln(1+\frac{1}{n}) = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\ln(1+\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$

D'après le résultat de la question 3), on a alors : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} n\ln(1+\frac{1}{n}) = 1}$

5) *Conclure, conclure... Relisons le but de l'exercice (on cherche à déterminer* $\lim\limits_{n\to+\infty} (1+\frac{1}{n})^n$*). Dans quelle question avons-nous fait un lien entre n ln*$(1+\frac{1}{n})$ *et* $(1+\frac{1}{n})^n$ *?*

D'après la question 2), pour tout entier naturel $n > 0$, $(1+\frac{1}{n})^n = \exp\left(n\ln(1+\frac{1}{n})\right)$

Or, d'après la 4), $\lim\limits_{n\to+\infty} n\ln(1+\frac{1}{n}) = 1$

Donc, par continuité de la fonction exponentielle *(en particulier en 1, c'est ça qui nous permet de conclure ici)*, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} \exp\left(n\ln(1+\frac{1}{n})\right) = \exp\left(1\right) = e$

On peut donc en conclure : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} (1+\frac{1}{n})^n = e}$

Maintenant, pourquoi cette différence avec la conjecture formulée en 1) ?

Dans la question 1), nous avions conjecturé 1 comme limite. Cette conjecture est fausse.

1^n tend certes vers 1 (car toujours égal à 1) lorsque n tend vers $+\infty$.

$(1+\frac{1}{n})^{1000}$ tend aussi vers 1 lorsque n tend vers $+\infty$.

Mais pas $(1+\frac{1}{n})^n$. En effet, dans ce dernier cas, l'exposant aussi varie (il n'est pas fixe comme dans le cas précédent).

Et l'argument nous permettant de passer de la limite de $1+\frac{1}{n}$ à la limite de $(1+\frac{1}{n})^{1000}$ (appliquer la fonction continue $g : x \longrightarrow x^{1000}$) ne tient donc plus lorsque l'exposant est n.

www.ayoub-et-les-maths.com
ayoub.hajlaoui.scolaire@gmail.com