Annulation d'exponentielles complexes

Ayoub Hajlaoui

Énoncé bien muet, attends qu'un interprète
comprenne qui tu es, et que plume s'apprête.

Énoncé : (temps conseillé : 30 min)

Soient a, b et c trois réels vérifiant : $e^{ia} + e^{ib} + e^{ic} = 0$. Montrer : $e^{2ia} + e^{2ib} + e^{2ic} = 0$

Correction :

Le genre d'exercice à astuce, qui nous entraîne à avoir une vision large. On peut se lancer dans des calculs du genre $0 = (e^{ia} + e^{ib} + e^{ic})^2 = e^{2ia} + e^{2ib} + e^{2ic} + 2(e^{ia}e^{ib} + e^{ia}e^{ic} + e^{ib}e^{ic})$*, et l'exercice reviendrait alors à montrer* $e^{ia}e^{ib} + e^{ia}e^{ic} + e^{ib}e^{ic} = 0$*... Personnellement, cela ne m'a pas réussi en temps limité, et j'ai dû penser à prendre l'énoncé sous un autre angle.*

On sait $e^{ia} + e^{ib} + e^{ic} = 0$. Donc $\frac{1}{3}\left(e^{ia} + e^{ib} + e^{ic}\right) = 0$
Wah, génial... Et alors ? Et alors, pensez géométrie.

Donc sur le plan complexe, le centre de gravité du triangle ABC (avec A, B et C d'affixes respectives e^{ia}, e^{ib}, et e^{ic}) est l'origine O du repère.
Normalement, cette propriété indiquant que l'affixe du centre de gravité de trois points est la moyenne des trois affixes est vue, au moins rapidement, en Terminale S. Tout comme l'affixe du milieu de deux points est la moyenne des deux affixes. Plus généralement, l'affixe de l'isobarycentre de n points est la moyenne des n affixes.

Or, A, B, et C sont tous trois sur le cercle trigonométrique (vu que $|e^{ia}| = |e^{ib}| = |e^{ic}| = 1$), de centre O. Donc O est aussi le centre du cercle circonscrit au triangle ABC.
Donc le centre de gravité de ABC et le centre du cercle circonscrit à ABC sont confondus. *Ah...*

Le triangle ABC est donc équilatéral.
Mais on s'écarte du sujet là, non ? Pas vraiment. D'une part, ce résultat pourra servir, et d'autre part, cela nous donne une idée pour montrer $e^{2ia} + e^{2ib} + e^{2ic} = 0$

Soient A', B' et C' les points d'affixes respectives e^{2ia}, e^{2ib}, et e^{2ic}. De même que pour ABC, le centre du cercle circonscrit au triangle A'B'C' est O. Montrons que A'B'C' est équilatéral, et nous pourrons en déduire que O est aussi son centre de gravité (et on aboutira alors à l'égalité demandée).

A'B' = $|e^{2ib} - e^{2ia}| = |(e^{ib})^2 - (e^{ia})^2| = |(e^{ib} + e^{ia})(e^{ib} - e^{ia})| = |e^{ib} + e^{ia}||e^{ib} - e^{ia}|$
Allez, là, un mini-éclair de génie serait le bienvenu... Mais c'est bien sûr :
Donc A'B' = $|-e^{ic}| \times |e^{ib} - e^{ia}|$ (en utilisant $e^{ia} + e^{ib} + e^{ic} = 0$)
Donc A'B' = $|e^{ic}| \times$ AB = AB.
De même, on montre : A'C' = AC et B'C' = BC.
Comme ABC est équilatéral, on a AB = AC = BC, ce qui donne A'B' = A'C' = B'C'.
Donc A'B'C' est équilatéral, et donc O est aussi son centre de gravité. On a donc :
$\boxed{e^{2ia} + e^{2ib} + e^{2ic} = 0}$

www.ayoub-et-les-maths.com
ayoub.hajlaoui.scolaire@gmail.com