Boules, probabilités et espérance

Ayoub Hajlaoui

Cahier en contrebas au milieu de la foule,
Cet exo de proba lui fait perdre la boule.

Énoncé : (d'après Pondichéry avril 2002) Temps conseillé : 55 min

Une urne contient n boules blanches ($n \in \mathbb{N}$ et $n \geqslant 2$), 5 boules rouges et 3 boules vertes.
On tire simultanément et au hasard deux boules de l'urne .
1) Quelle est la probabilité de tirer deux boules blanches ?
2) On note $p(n)$ la probabilité de tirer deux boules de même couleur. Montrer que $p(n) = \dfrac{n^2 - n + 26}{(n+8)(n+7)}$.
3) Calculer $p(4)$. On supposera désormais $n = 4$.
4) Un tirage consiste à tirer simultanément et au hasard deux boules de l'urne.
Un joueur effectue deux tirages indépendants, en remettant dans l'urne avant le second tirage les deux boules tirées la première fois. Il mise au départ la somme de 30 euros.
Pour chaque tirage :
— si les deux boules sont de même couleur, il reçoit alors 40 euros,
— si elles sont de couleurs différentes, il reçoit alors 5 euros.
On appelle gain du joueur la différence, à l'issue des deux tirages, entre la somme reçue par le joueur et sa mise initiale (ce gain peut être positif ou négatif). On désigne par X la variable aléatoire égale au gain (en euros) du joueur.
a) Quelles sont les valeurs possibles pour X ?
b) Déterminer la loi de probabilité de X.
c) Calculer l'espérance de X. Ce jeu est-il favorable au joueur ?

Correction :

1) *Même si les deux boules sont tirées en même temps, on parlera de première boule et de seconde boule pour nous aider à compter les cas.*

Il y a n boules blanches sur un total de $n + 5 + 3 = n + 8$ boules.
La probabilité de tirer une première boule blanche est donc $\dfrac{n}{n+8}$

Sachant que la première boule tirée est blanche, au moment de tirer la seconde boule, il reste $n-1$ boules blanches (puisqu'on en a enlevé une) sur un total de $n+7$ boules (puisqu'on en a enlevé une, à savoir la blanche qu'on a retirée).

La probabilité de tirer une seconde boule blanche (sachant que la première tirée était blanche) est donc $\dfrac{n-1}{n+7}$. $\boxed{\text{La probabilité de tirer deux boules blanches est donc } \dfrac{n}{n+8} \times \dfrac{n-1}{n+7} = \dfrac{n(n-1)}{(n+8)(n+7)}}$

Pourquoi avoir multiplié les deux probabilités ? Ca peut paraître intuitif, mais je vais quand même un peu vite en besogne. Ce point sera abordé plus en détail en Terminale. En fait, la première probabilité est celle de tirer une boule blanche, alors que la seconde est celle de tirer une boule blanche sachant que la première tirée est blanche. A cause de ce " sachant que ", on parle de ***probabilité conditionnelle****. Et on a la formule suivante pour deux événements A_1 et A_2 : $P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \times P(A_2 \text{ sachant } A_1)$. Rappelons que $P(A_1 \cap A_2)$ est la probabilité que les deux événements A_1 et A_2 se produisent.*

Dans notre cas, A_1 est tout simplement la probabilité de tirer une première boule blanche, et A_2 la probabilité de tirer une seconde boule blanche.

2) *Tirer deux boules de même couleur... Comment dire ça autrement, de manière plus simple pour nos calculs ?*

Tirer deux boules de la même couleur, c'est soit tirer deux boules blanches, soit tirer deux boules rouges, soit tirer deux boules vertes.

Soit C l'événement : " on tire deux boules de la même couleur. "
Soit B l'événement : " on tire deux boules blanches. "
Soit R l'événement : " on tire deux boules rouges. "
Soit V l'événement : " on tire deux boules vertes. "
L'événement C correspond donc à l'union des événements B, R, et V.
Autrement dit : $C = B \cup R \cup V$

Comme B, R et V sont trois événements incompatibles *(on ne peut pas voir se produire simultanément deux ou plus de ces événements)*, on a : $\underline{P(C) = P(B) + P(R) + P(V)}$

Profitons-en pour une petite parenthèse... Dans le cas général, pour deux événements A_1 et A_2 (pas forcément incompatibles), on a $P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)$

En utilisant la formule avec $A_1 = B \cup R$ et $A_2 = V$, on a alors :

$P(B \cup R \cup V) = P\big((B \cup R) \cup V\big) = P(B \cup R) + P(V) - P\big((B \cup R) \cap V\big)$

En réutilisant la formule avec $A_1 = B$ et $A_2 = R$, on a alors :

$P(B \cup R \cup V) = P(B) + P(R) - P(B \cap R) + P(V) - P\big((B \cup R) \cap V\big)$

Remarquons alors : $(B \cup R) \cap V = (B \cap V) \cup (R \cap V)$ (distributivité de $\cap$ sur $\cup$, comme celle de $\times$ sur $+$)

Donc $P\big((B \cup R) \cap V\big) = P\big((B \cap V) \cup (R \cap V)\big) = P(B \cap V) + P(R \cap V) - P\big((B \cap V) \cap (R \cap V)\big)$

$= P(B \cap V) + P(R \cap V) - P(B \cap V \cap R)$ (puisqu'on a évidemment $V \cap V = V$)

Finalement, $P(B \cup R \cup V) = P(B) + P(R) - P(B \cap R) + P(V) - \big[P(B \cap V) + P(R \cap V) - P(B \cap V \cap R)\big]$

D'où $P(B \cup R \cup V) = P(B) + P(R) + P(V) - P(B \cap R) - P(B \cap V) - P(R \cap V) + P(B \cap V \cap R)$

Et comme dans notre cas, les événements B, R et V sont disjoints, les probabilités d'intersections sont nulles, et il ne reste plus que ce qu'on a souligné en bleu. Fin de la parenthèse.

On a donc $p(n) = P(C) = P(B) + P(R) + P(V)$ *(je reprends $p(n)$, notation de l'énoncé)*

$P(B)$ a en fait été calculé à la question précédente, et on a $\boxed{P(B) = \dfrac{n(n-1)}{(n+8)(n+7)}}$

On calcule $P(R)$ et $P(V)$ de la même manière.

$P(R) = \dfrac{5}{n+8} \times \dfrac{4}{n+7}$ *(même calcul que pour $P(B)$ en remplaçant le nombre initial de boules blanches n par le nombre initial de boules rouges 5)*

Donc $\boxed{P(R) = \dfrac{20}{(n+8)(n+7)}}$

De même, $P(V) = \dfrac{3}{n+8} \times \dfrac{2}{n+7}$. Donc $\boxed{P(V) = \dfrac{6}{(n+8)(n+7)}}$

Donc : $p(n) = \dfrac{n(n-1)}{(n+8)(n+7)} + \dfrac{20}{(n+8)(n+7)} + \dfrac{6}{(n+8)(n+7)} = \dfrac{n(n-1)+26}{(n+8)(n+7)}$

Donc $\boxed{p(n) = \dfrac{n^2 - n + 26}{(n+8)(n+7)}}$

3) *Le genre de question cadeau qu'il faut absolument saisir en plein vol aux contrôles, même si on n'a pas réussi les précédentes...*

On a donc $p(4) = \dfrac{4^2 - 4 + 26}{(4+8)(4+7)} = \dfrac{16 - 4 + 26}{12 \times 11} = \dfrac{38}{132}$. Donc $\boxed{p(4) = \dfrac{19}{66}}$

4)a) Un tirage correspond au fait de tirer deux boules. Trois cas de figure sont possibles :

- si pour chacun des deux tirages, les deux boules tirées sont de même couleur, le joueur recevra $40 + 40 = 80$ euros. Mais pour avoir X, il faut retirer sa mise initiale de 30 euros. Donc dans ce cas, $X = 50$.

- si, pour un tirage, les deux boules tirées sont de même couleur, mais que pour l'autre tirage, les boules tirées sont de couleurs différentes, le joueur reçoit $40+5 = 45$ euros. En retirant la mise initiale de 30 euros, on obtient dans ce cas $X = 15$.

- si pour chacun des deux tirages, les deux boules tirées sont de couleurs différentes, le joueur recevra $5 + 5 = 10$ euros. En retirant la mise initiale de 30 euros, on obtient dans ce cas $X = -20$.

$\boxed{\text{Les valeurs possibles pour } X \text{ sont donc } 50,\ 15 \text{ et } -20.}$

4)b) *Donner la loi de probabilité de X, c'est tout simplement déterminer, pour chacune des valeurs possibles de X, la probabilité que X prenne cette valeur.*

$P(X = 50)$ est la probabilité que, pour chacun des deux tirages, les deux boules tirées soient de même couleur (premier cas exposé en 4)a)).

Les deux tirages sont indépendants d'après l'énoncé *(le résultat de l'un n'influence pas le résultat de l'autre).*

La probabilité pour un tirage de donner deux boules de même couleur est $\dfrac{19}{66}$ (cf quest. 2 et 3).

La probabilité pour un tirage de donner deux boules de couleurs différentes est donc $1 - \dfrac{19}{66} = \dfrac{47}{66}$

La probabilité pour que les deux tirages (indépendants) donnent chacun deux boules de même couleur est donc $\dfrac{19}{66} \times \dfrac{19}{66} = \dfrac{361}{4356}$

En effet, pour deux événements indépendants A et B, on a $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

Donc $\boxed{P(X = 50) = \dfrac{361}{4356}}$

De même, $P(X = 15) = \dfrac{19}{66} \times \dfrac{47}{66} + \dfrac{47}{66} \times \dfrac{19}{66} = 2 \times \dfrac{19}{66} \times \dfrac{47}{66}$.

Pourquoi cette addition ? Car $P(X = 15)$ correspond au deuxième cas de la 4)a). Dans ce cas, soit le premier tirage donne deux boules de même couleur et le deuxième tirage non, soit le premier tirage ne donne pas deux boules de même couleur et le deuxième tirage oui.

Donc $\boxed{P(X = 15) = \dfrac{1786}{4356}}$

Enfin, $P(X = -20) = 1 - \big(P(X = 50) + P(X = 15)\big)$ *(la somme des probabilités devant faire 1)*

Donc $P(X = -20) = 1 - \dfrac{361}{4356} - \dfrac{1786}{4356} = \dfrac{4356 - 361 - 1786}{4356}$. Donc $\boxed{P(X = -20) = \dfrac{2209}{4356}}$

On pouvait calculer cette dernière probabilité comme les précédentes (par produit), mais passer par $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$ me semble plus joli (et me donne l'occasion de vous rappeler cette règle).

4)c) Par définition, l'espérance de X est :

$\mathrm{E}(X) = 50 \times P(X = 50) \ + \ 15 \times \ P(X = 15) \ + \ (-20) \times P(X = -20)$

Donc $\mathrm{E}(X) = 50 \times \dfrac{361}{4356} \ + \ 15 \times \dfrac{1786}{4356} \ - \ 20 \times \dfrac{2209}{4356}$

Après calcul, on obtient : $\boxed{\mathrm{E}(X) = \dfrac{5}{33}}$.

$\mathrm{E}(X) > 0$, donc $\boxed{\text{le jeu est favorable au joueur}}$ (qui peut espérer, en moyenne, gagner $\dfrac{5}{33}$ €)

Si on avait eu $E(X) < 0$, le jeu aurait été défavorable au joueur. Et si on avait eu $E(X) = 0$, le jeu aurait été équilibré.