Centres confondus et triangle équilatéral

Ayoub Hajlaoui

Dans un sens moins classique, savons-nous raisonner ?
Pour de telles pratiques, il faut avoir du nez.

Énoncé : (temps conseillé : 45 min)

Vous êtes censés savoir que si un triangle est équilatéral, alors son centre de gravité (point d'intersection des médianes), le centre de son cercle circonscrit (point d'intersection des médiatrices) et son orthocentre (point d'intersection des hauteurs) sont confondus.

Le but de cet exercice est de s'intéresser à une sorte de réciproque. On veut montrer que si le centre de gravité d'un triangle et le centre du cercle circonscrit à ce triangle sont confondus, alors ce triangle est équilatéral.

Soit ABC un triangle non plat. On suppose que le point G est à la fois son centre de gravité et le centre de son cercle circonscrit. Soient I le milieu de [AB], J le milieu de [AC] et K le milieu de [BC].

Une figure peut vous aider...

On rappelle que le centre de gravité d'un triangle quelconque est situé aux $\frac{2}{3}$ de chaque médiane en partant du sommet correspondant. Autrement dit :
$\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AK}$, $\overrightarrow{BG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BJ}$ et $\overrightarrow{CG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CI}$.

1) Montrer que (AK) est à la fois médiane issue de A et médiatrice de [BC]. De la même manière, on peut montrer que (BJ) est à la fois médiane issue de B et médiatrice de [AC], et que (CI) est à la fois médiane issue de C et médiatrice de [AB].

2) Montrer que (AK), (BJ) et (CI) sont aussi les hauteurs du triangle ABC.

3) Montrer que AK = BJ = CI

4) a) Exprimer l'aire de ABC de 3 façons différentes.

b) Conclure.

Correction :

1) Dans le triangle ABC, K est le milieu du côté [BC], c'est-à-dire du côté opposé au sommet A. Donc par définition, (AK) est la médiane issue de A de ABC.

Qu'en est-il de la médiatrice de [BC] ?

Par définition, la médiatrice de [BC] coupe [BC] perpendiculairement en son milieu K. On sait aussi qu'elle passe par G, puisque G est le centre du cercle circonscrit à ABC, c'est-à-dire le point d'intersection des médiatrices de ABC.

Remarquez les points communs (au sens littéral, les POINTS communs) entre la médiane issue de A et la médiatrice de [BC]...

La médiane (AK) passe par K (par définition) et par G (puisque G est le centre de gravité de ABC, c'est-à-dire le point d'intersection des médianes de ABC.

Comme dit plus haut, la médiatrice de [BC] passe aussi par K et par G, avec K et G deux points distincts.

www.ayoub-et-les-maths.com
ayoub.hajlaoui.scolaire@gmail.com

Si K et G étaient confondus, le triangle serait plat, car on aurait alors $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AK}$ d'une part, et $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AK}$ d'autre part (rappel de l'énoncé). On aurait donc : $\overrightarrow{AK} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AK}$, c'est-à-dire $\frac{1}{3}\overrightarrow{AK} = 0$, c'est-à-dire $\overrightarrow{AK} = 0$. Le point A et le milieu K du côté opposé B seraient donc confondus, et le triangle serait donc plat.

Maintenant, que dire de deux droites qui ont deux points distincts en commun ?

Par deux points distincts, il ne peut passer qu'une seule droite.

Donc $\boxed{\text{la droite (AK) est à la fois médiane issue de A et médiatrice de [BC].}}$

Et quand l'énoncé dit " de la même manière, on peut montrer que... ", entendons-nous bien, il ne nous demande pas de le faire. Il nous donne juste le résultat, utile pour la suite. La démonstration serait parfaitement similaire à celle qu'on vient de faire.

2) *Rappelons qu'une hauteur d'un triangle passe par un sommet et coupe perpendiculairement le côté opposé (ou, plus généralement, la droite correspondant au côté opposé, l'intersection pouvant se faire en dehors du côté...)*

La droite (AK) est à la fois médiatrice et médiane de ABC. *Tirons-en les hypothèses qu'il nous faut pour montrer que c'est aussi une hauteur...*

Comme (AK) est médiatrice de [BC], elle coupe [BC] perpendiculairement *(et en son milieu, certes, mais ça ne nous sert pas ici)*. De plus, (AK) passe évidemment par le sommet A. Donc (AK) passe par un sommet de ABC et coupe perpendiculairement le côté opposé.

(AK) est donc aussi une hauteur de ABC.

On montre de la même manière que (BJ) et (CI) sont aussi des hauteurs de ABC.

Donc $\boxed{\text{(AK), (BJ) et (CI) sont aussi les hauteurs du triangle ABC.}}$ (en plus d'être ses médianes et médiatrices)

3) *Dans les hypothèses assez restreintes que nous donne l'énoncé, où pourrions-nous voir une égalité entre longueurs ? G est le centre du cercle circonscrit à ABC, y voyez-vous quelque chose d'intéressant ?*

G est le centre du cercle circonscrit à ABC, cercle qui, par définition, passe par A, B et C. Donc $\underline{AG = BG = CG}$ (trois rayons de ce cercle).

Et là, voyez-vous comment arriver à l'égalité demandée par l'énoncé ?

Or, $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AK}$, $\overrightarrow{BG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BJ}$ et $\overrightarrow{CG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CI}$.

Donc $AG = \frac{2}{3}AK$, $BG = \frac{2}{3}BJ$ et $CG = \frac{2}{3}CI$. *(l'égalité entre les vecteurs impliquant l'égalité entre les longueurs)*

Donc $AK = \frac{3}{2}AG$, $BJ = \frac{3}{2}BG$ et $CI = \frac{3}{2}CG$

De par l'égalité soulignée en bleu, on a alors : $\boxed{AK = BJ = CI}$

4) a) *Vous voyez beaucoup d'options pour calculer l'aire d'un triangle quelconque (puisque pour l'instant, pour nous, ABC est quelconque) ? Personnellement, j'ai en tête cette bonne vieille formule, (base × hauteur)/2*

AK, BJ, et CI étant les hauteurs de ABC, l'aire $\mathcal{A}_{ABC}$ de ABC peut s'exprimer ainsi :

$$\mathcal{A}_{ABC} = \frac{BC \times AK}{2} = \frac{AC \times BJ}{2} = \frac{AB \times CI}{2}$$

4)b) Or, nous avons montré en 3) : AK = BJ = CI.

Donc $\frac{BC \times AK}{2} = \frac{AC \times AK}{2} = \frac{AB \times AK}{2}$ *avec $AK \neq 0$, donc on peut simplifier...*

Donc BC = AC = AB. Autrement dit, $\boxed{\text{le triangle ABC est équilatéral.}}$

www.ayoub-et-les-maths.com
ayoub.hajlaoui.scolaire@gmail.com