Cercle et alignement

Ayoub Hajlaoui

Devrai-je m'aligner sur les fous de vos mondes
Pour un beau jour siéger à votre table ronde ?

Énoncé : (temps conseillé : 15 min)

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. On désigne par A le point de coordonnées $(1\ ;\ 0)$ et par $(\mathcal{C})$ le cercle de centre A et de rayon 1.

Soient les points définis par les coordonnées suivantes : F$(2\ ;\ 0)$, B$(\frac{3}{2}\ ;\ \frac{\sqrt{3}}{2})$ et E$(\frac{5}{2}\ ;\ \frac{3\sqrt{3}}{2})$.

1) Montrer que les points B et F appartiennent au cercle $(\mathcal{C})$.
2) Montrer que les points A, B et E sont alignés.

Correction :

Si tracer une figure peut vous aider, faites-le. Mais hors de question de prouver quoi que ce soit par cette figure.

1) *Comment peut-on traduire mathématiquement le fait qu'un point (dont on connaît les coordonnées) appartienne à un cercle (dont on connaît les coordonnées du centre et le rayon) ?*

Pour montrer que le point B est sur le cercle $(\mathcal{C})$ de centre A et de rayon 1, il faut et il suffit de montrer que la distance AB vérifie AB $= 1$

Rappelons que la distance entre deux points $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$ du plan se calcule ainsi : $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$. Pour plus de précisions sur cette formule, voir le corrigé de l'exercice Distances et triangle.

$$\text{AB} = \sqrt{(\tfrac{3}{2} - 1)^2 + (\tfrac{\sqrt{3}}{2} - 0)^2} = \sqrt{(\tfrac{1}{2})^2 + (\tfrac{\sqrt{3}}{2})^2} = \sqrt{\tfrac{1}{4} + \tfrac{3}{4}}$$

Quand j'élève une fraction au carré, je n'oublie pas d'élever le numérateur ET le dénominateur au carré.

Donc $\text{AB} = \sqrt{\frac{4}{4}} = \sqrt{1} = 1$

$\boxed{\text{Le point B appartient donc au cercle } (\mathcal{C}).}$ *Mathématiquement, on peut noter : $B \in (\mathcal{C})$*

On procède de même pour le point F :
$\text{AF} = \sqrt{(2-1)^2 + (0-0)^2} = \sqrt{1^2} = \sqrt{1} = 1$

$\boxed{\text{Le point F appartient donc au cercle } (\mathcal{C}).}$ *Mathématiquement, on peut noter : $F \in (\mathcal{C})$*

2) *Comment montrer que trois points (dont on connaît les coordonnées) sont alignés ? Servons-nous des vecteurs...*

Montrons que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AE}$ sont colinéaires.

On aurait pu plutôt s'intéresser, par exemple, à $\overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{BE}$. *J'ai préféré que le point commun soit A parce que c'est celui dont les coordonnées sont les plus simples.*

$\overrightarrow{AB}\,(\frac{3}{2} - 1\ ;\ \frac{\sqrt{3}}{2} - 0)$. Donc $\overrightarrow{AB}\,(\frac{1}{2}\ ;\ \frac{\sqrt{3}}{2})$

$\overrightarrow{AE}\,(\frac{5}{2} - 1\ ;\ \frac{3\sqrt{3}}{2} - 0)$. Donc $\overrightarrow{AE}\,(\frac{3}{2}\ ;\ \frac{3\sqrt{3}}{2})$

On remarque que les coordonnées de $\overrightarrow{AE}$ s'obtiennent en multipliant les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ par 3. D'où la proportionnalité entre les coordonnées de ces deux vecteurs.

Les vecteurs $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont donc colinéaires.

Si on ne voit pas directement la proportionnalité - mais le plus souvent, elle saute aux yeux... - il y a une petite recette qui nous permet de vérifier la colinéarité (ou pas) entre deux vecteurs $\overrightarrow{u}\,(x_{\vec{u}}\ ;\ y_{\vec{u}})$ *et* $\overrightarrow{v}\,(x_{\vec{v}}\ ;\ y_{\vec{v}})$ *en calculant* $x_{\vec{u}}y_{\vec{v}} - y_{\vec{u}}x_{\vec{v}}$.

Les vecteurs $\overrightarrow{u}$ *et* $\overrightarrow{v}$ *sont colinéaires si et seulement si* $x_{\vec{u}}y_{\vec{v}} - y_{\vec{u}}x_{\vec{v}} = 0$. *Dans notre cas, en faisant le calcul, on obtiendrait bien* 0*, mais ce serait se casser la tête pour rien.*

Les points A, B et E sont donc alignés.

Attention ! Ici, du fait que $\overrightarrow{AE}$ *et* $\overrightarrow{AB}$ *sont colinéaires, je peux déduire que les points A, B et E sont alignés. Mais si j'avais deux vecteurs* $\overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{CD}$ *par exemple, je n'aurais évidemment pas pu conclure le fait que A, B, C et D seraient alignés. Dans notre cas, on peut le faire car il y a un point (A) commun à* $\overrightarrow{AE}$ *et* $\overrightarrow{AB}$.

www.ayoub-et-les-maths.com
ayoub.hajlaoui.scolaire@gmail.com