Chasles, Chasles, et encore Chasles

Ayoub Hajlaoui

Aux plus déçus des miens, qui me voulaient docteur :
Je suis un chirurgien disséquant les vecteurs.

Énoncé : (temps conseillé : 20 min)

Soit un parallélogramme ABCD, et soit a un réel non nul. On considère les points M et N définis par : $\overrightarrow{AM} = a\,\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CN} = \dfrac{1}{a}\,\overrightarrow{CB}$. Montrer que les points D, M et N sont alignés.

Correction :

On espère donc tomber sur une égalité vectorielle ne mettant en jeu que les points D, M et N. Ça sent la relation de Chasles à plein nez, mais pour ne pas rester coincés, n'oublions aucune bille à notre disposition.

ABCD est un parallélogramme, donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$
J'imagine que vous auriez pensé directement à la première égalité, à partir du nom du parallélogramme. Mais il ne faut pas non plus oublier la seconde (quitte à tracer rapidement une figure pour le voir). Elle peut ne pas servir à nos calculs, mais c'est bien de l'avoir en tête, au cas où...

Essayons maintenant de " disséquer " $\overrightarrow{DN}$*, en espérant ne retomber à la fin que sur des vecteurs mettant en jeu D, M et N. Ce n'est pas le seul moyen de parvenir à nos fins, mais pourquoi ai-je choisi* $\overrightarrow{DN}$ *pour utiliser la relation de Chasles ? Parce que je pourrais le séparer en* $\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CN}$*, et j'ai des infos sur ces deux vecteurs, que je pourrai exploiter...*

D'après la relation de Chasles, $\overrightarrow{DN} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CN} = \overrightarrow{AB} + \dfrac{1}{a}\,\overrightarrow{CB}$
(en utilisant $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{CN} = \dfrac{1}{a}\,\overrightarrow{CB}$)

D'accord, mais que faire avec $\overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{CB}$*, maintenant ? On est encore loin de ce qu'on veut, à savoir uniquement mettre en jeu D, M et N...*

$\overrightarrow{AM} = a\,\overrightarrow{AB}$. Autrement dit, $\overrightarrow{AB} = \dfrac{1}{a}\,\overrightarrow{AM}$
De plus, $\overrightarrow{CB} = -\overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DA}$ *(je vous avais bien dit que* $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$ *pouvait nous être utile..).* Reprenons donc : $\overrightarrow{DN} = \overrightarrow{AB} + \dfrac{1}{a}\,\overrightarrow{CB} = \dfrac{1}{a}\,\overrightarrow{AM} + \dfrac{1}{a}\,\overrightarrow{DA}$

Et là, si vous ne voyez rien, faites un effort, et écarquillez bien les yeux...

Donc $\overrightarrow{DN} = \dfrac{1}{a}\,(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{DA}) = \dfrac{1}{a}\,(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AM})$ *Peut-être le voyez-vous mieux dans ce sens...*

Donc $\overrightarrow{DN} = \dfrac{1}{a}\,\overrightarrow{DM}$ *Encore Chasles....* Les vecteurs $\overrightarrow{DN}$ et $\overrightarrow{DM}$ sont donc colinéaires.

$\boxed{\text{Les points D, M et N sont donc alignés.}}$

www.ayoub-et-les-maths.com
ayoub.hajlaoui.scolaire@gmail.com