Condition de colinéarité

Ayoub Hajlaoui

Je vois sur le ciment la question fleuronner :
D'où vient ce croisement entre coordonnées ?

Énoncé : (temps conseillé : 20 min)

Soient $\vec{u}\,(x, y)$ et $\vec{v}\,(x', y')$ deux vecteurs non nuls.
1) Montrer que si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, alors $xy' - yx' = 0$.
2) Réciproquement, montrer que si $xy' - yx' = 0$, alors $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.
3) Conclure.

Correction :

1) $\boxed{\text{Si } \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont colinéaires,}}$ alors il existe un réel k tel que $\vec{v} = k\vec{u}$ *(on aurait aussi pu dire : tel que $\vec{u} = k\vec{v}$, ça revient au même, même si ce ne serait pas forcément le même k).*

On a donc (en retranscrivant coordonnée par coordonnée cette égalité vectorielle) : $\begin{cases} x' = kx \\ y' = ky \end{cases}$

Donc $xy' - yx' = x \times ky - y \times kx = kxy - kxy$. Donc $\boxed{xy' - yx' = 0.}$

2) $\boxed{\text{Si } xy' - yx' = 0}$: on a alors $xy' = yx'$

Bon, pour l'instant, je n'ai pas dit grand-chose... Mais comment montrer la colinéarité ? En montrant une proportionnalité entre les coordonnées des deux vecteurs. Pour cela, j'aimerais bien mettre y' et y du même côté, et x' et x du même côté. Mais pour cela, il faut diviser, et attention à ne pas diviser par quelque chose de potentiellement nul. Peut-être la prudence devra-t-elle nous inciter à distinguer différents cas de figure...

L'énoncé dit que $\vec{u}$ est non nul. Autrement dit, ses deux coordonnées ne peuvent pas être toutes les deux nulles. On ne peut donc pas avoir à la fois $x = 0$ et $y = 0$.

Mais rien n'interdit à l'un des deux d'être nul. Le vecteur $\vec{w}\,(3, 0)$ n'est pas nul, par exemple...

<u>Si $x \neq 0$ et $y \neq 0$:</u> à partir de $xy' = yx'$, on obtient $\dfrac{y'}{y} = \dfrac{x'}{x}$ (diviser par x et par y est possible)

Les coordonnées de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont donc proportionnelles. Donc <u>$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.</u>

<u>Si $x = 0$ et $y \neq 0$:</u> à partir de $xy' = yx'$, on obtient $0 = yx'$ avec $y \neq 0$. Le produit yx' étant nul, si ce n'est pas y qui est nul, c'est forcément x' qui est nul. Donc $x' = 0$.

On a alors $\vec{u}\,(0, y)$ et $\vec{v}\,(0, y')$ (avec $y \neq 0$, et $y' \neq 0$ car le vecteur $\vec{v}$ est non nul d'après l'énoncé)

Donc $\vec{v} = \dfrac{y'}{y}\,\vec{u} = k\,\vec{u}$ (en posant $k = \dfrac{y'}{y}$). Donc <u>$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.</u>

<u>Si $x \neq 0$ et $y = 0$:</u> la démonstration se fait de manière similaire au cas précédent.

Dans tous les cas, on parvient à la conclusion que $\boxed{\vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont colinéaires.}}$

3) En conclusion, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si $xy' - yx' = 0$. Voilà pourquoi on peut savoir si deux vecteurs sont colinéaires en effectuant ce test.

www.ayoub-et-les-maths.com
ayoub.hajlaoui.scolaire@gmail.com