Convergence d'une suite suivant son premier terme

Ayoub Hajlaoui

Il faut en convenir : nos routes se séparent,
Car nos pas à venir dépendent du départ.

Énoncé : (temps conseillé : 40 min)

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{2}(1 + x^2)$

1) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ est croissante quel que soit u_0 réel.
2) Étudier sa convergence suivant la valeur de u_0.

Correction :

1) *La bonne vieille recette de la différence. C'est dans les vieux pots qu'on fait la meilleure soupe...*

$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n = \dfrac{1}{2}(1 + u_n^2) - u_n$

Que faire, maintenant ? N'oublions pas que ce qui nous intéresse, c'est le signe. Pour ce faire, essayons de " compacter " au maximum, par exemple en factorisant par $\dfrac{1}{2}$ *. Ce n'est pas non plus l'idée du siècle, mais peut-être qu'on y verra plus clair...*

$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{2}(1 + u_n^2 - 2u_n)$ *Vous ne voyez rien ? Peut-être que dans un autre ordre...*

$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{2}(u_n^2 - 2u_n + 1) = \dfrac{1}{2}(u_n - 1)^2 \geq 0$

$\boxed{\text{Donc } (u_n) \text{ est bien une suite croissante.}}$

2) *La difficulté de cette question réside essentiellement dans le fait que c'est à nous de penser aux différents cas à distinguer pour la valeur de u_0.*
Pour nous simplifier la vie, commençons par nous demander vers quoi (u_n) convergerait si on savait qu'elle convergeait....

Si (u_n) converge vers une certaine limite l, en faisant tendre n vers $+\infty$ dans l'égalité $u_{n+1} = f(u_n)$, on obtient, par continuité de la fonction f : $l = f(l)$
On a alors : $f(l) - l = 0$, c'est-à-dire (en reprenant les calculs de la question 1) : $\dfrac{1}{2}(u_n - 1)^2 = 0$
Donc $l = 1$. Donc si (u_n) converge, elle converge vers 1.

Cela va nous aider à distinguer des cas assez simples dans l'étude de la convergence de (u_n).

Si $u_0 = 1$, la suite (u_n) est constante de valeur 1 (puisque $f(1) = 1$). Elle converge donc vers 1.
Si $u_0 > 1$, par croissance de la suite (u_n) (démontrée à la question 1), on a, pour tout entier naturel n : $u_n > u_0 > 1$. Donc (u_n) ne peut pas converger vers 1. Or, on a dit que si (u_n) convergeait, c'était forcément vers 1. Donc dans ce cas, (u_n) ne converge pas.

Précisions importantes :

- On avait prouvé l'implication : " (u_n) converge " $\Longrightarrow$ " (u_n) converge vers 1 ". C'est par contraposée qu'on obtient l'implication " (u_n) ne converge pas vers 1 " $\Longrightarrow$ " (u_n) ne converge pas ". Rappelons que la contraposée de l'implication $A \Longrightarrow B$ est : non $B \Longrightarrow$ non A (et pas non $A \Longrightarrow$ non B)

- attention, dire seulement " $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 1$ " ne suffit pas à en déduire que (u_n) ne peut pas converger vers 1. Prenez par exemple la suite (v_n) définie par $v_n = 1 + \dfrac{1}{n+1}$. Tous ses termes sont strictement supérieurs à 1, et pourtant, elle converge vers 1.
En fait, les inégalités se conservent au sens large (et non au sens strict) par passage à la limite. Autrement dit, si pour tout n, $u_n > 1$, on peut dire que la limite l de (u_n) (si elle existe) vérifie $l \geq 1$ (et pas forcément $l > 1$)
Dans le cas précis de notre suite (u_n) , on a : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > u_0$ donc si (u_n) a une limite l, elle vérifierait $l \geq u_0 > 1$ donc $l > 1$, ce qui est absurde vu nos conclusions précédentes (soulignées en bleu).

Si $u_0 = 1$, $u_1 = 1$ et la suite (u_n) est constante à partir de u_1, de valeur 1 (puisque $f(1) = 1$). Elle converge donc vers 1.

Si $u_0 < -1$, $u_0^2 > 1$ et donc $u_1 = f(u_0) = \dfrac{1}{2}(1 + u_0^2) > \dfrac{1}{2}(1+1)$. Autrement dit, $u_1 > 1$. Sachant que la suite (u_n) est croissante, on peut en conclure (de même que pour le cas $u_0 > 1$) qu'elle ne peut pas converger vers 1, et donc (contraposée de ce qui est souligné en bleu) qu'elle ne peut pas converger.

Reste le cas $-1 < u_0 < 1$. Dans ce cas, $u_0^2 < 1$, et on a alors : $u_1 < \dfrac{1}{2}(1 + 1^2) = 1$
Ce résultat ne suffit pas en soi, mais nous donne l'idée de souligner le fait que cette majoration par 1 va se conserver pour tout n. Au fait, j'espère que vous voyez pourquoi cette majoration nous intéresse...

Démontrons par récurrence sur n : $\forall n \in \mathbb{N},\ \ u_n \in]-1\ ;\ 1[$.
Pourquoi pas juste " $u_n < 1$ "? Parce que ça bloquera en passant par f. Exemple : si on avait $u_n = -12$, on n'aurait pas $f(u_n) < -1$, loin de là...
Initialisation : $u_0 \in]-1\ ;\ 1[$ par hypothèse.
Hérédité : Si pour un certain n, $u_n \in\ ]-1\ ;\ 1[$, alors $0 < u_n^2 < 1$ et on a alors $\dfrac{1}{2} < \dfrac{1}{2}(1 + u_n^2) < 1$. Autrement dit, $u_{n+1} \in\ ]\dfrac{1}{2}\ ;\ 1[\ \subset\ ]-1\ ;\ 1[$. Donc $u_{n+1} \in\ ]-1\ ;\ 1[$.
Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N},\ \ u_n \in]-1\ ;\ 1[$. Donc $u_n < 1$.

Donc la suite (u_n) est majorée par 1. De plus, elle est croissante. Donc elle converge. Et donc (cf souligné en bleu) elle converge vers 1.

Récapitulons : si $u_0 \notin]-1\ ;\ 1[$, (u_n) ne converge pas. Et si $u_0 \in]-1\ ;\ 1[$, (u_n) converge vers 1.

www.ayoub-et-les-maths.com
ayoub.hajlaoui.scolaire@gmail.com