Démonstration géométrique d'une limite trigonométrique

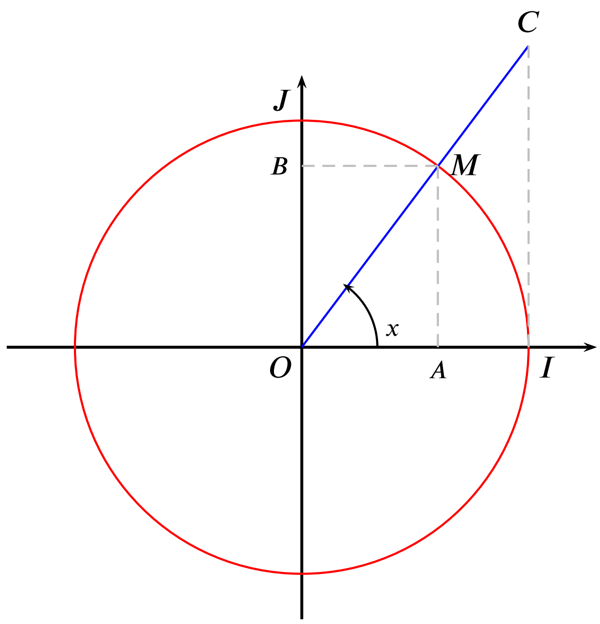
Ayoub Hajlaoui

Ces calculs scélérats t'irritent l'épiderme ?
Le cercle t'aidera à les mener à terme.

Énoncé : (temps conseillé : 45 min)

Dans le repère orthonormé (O, I, J), on trace le cercle trigonométrique. Soit x (en radians) un angle strictement compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$, et M le point associé sur le cercle trigonométrique. Les droites (MA) et (OA) sont perpendiculaires, de même que les droites (MB) et (OB). Les droites (MA) et (CI) sont parallèles.

On note $\tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$.



1) Démontrer $IC = \tan(x)$

2) Calculer, en fonction de x : l'aire $\mathcal{A}_{OIM}$ du triangle OIM, l'aire $\mathcal{A}_{OIC}$ du triangle OIC, et l'aire $\mathcal{S}_{OIM}$ du secteur OIM (portion du disque comprise entre $[OI]$ et $[OM]$, dans le sens direct).

3) En déduire que pour tout $x \in \left]0\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$, $1 \leq \dfrac{x}{\sin(x)} \leq \dfrac{1}{\cos(x)}$

4) En déduire que $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\sin(h)}{h} = 1$ *(autrement dit, que lorsque h devient très proche de 0, $\dfrac{\sin(h)}{h}$ devient très proche de 1).*

Correction :

1) Par définition, $OA = \cos(x)$ et $OB = \sin(x)$ (donc $AM = \sin(x)$)

De quoi pouvoir appliquer le théorème de Thalès...

Les droites (MC) et (AI) se coupent en le point O. Les droites (AM) et (IC) sont parallèles (d'après l'énoncé). On reconnaît là une configuration de Thalès.

Donc d'après le théorème de Thalès, $\dfrac{OA}{OI} = \dfrac{OM}{OC} = \dfrac{AM}{IC}$

On connaît OA, OI et AM, et on cherche IC...

Donc $\dfrac{OA}{OI} = \dfrac{AM}{IC}$, avec $OA = \cos(x)$, $AM = \sin(x)$, et $OI = 1$

Donc $IC = \dfrac{AM \times OI}{OA} = \dfrac{\sin(x) \times 1}{\cos(x)} = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$. $\boxed{\text{Donc } IC = \tan(x)}$

2) Une hauteur du triangle OIM est $[AM]$, et le côté opposé est $[OI]$. Donc $\mathcal{A}_{OIM} = \dfrac{AM \times OI}{2}$.

Donc $\mathcal{A}_{OIM} = \dfrac{\sin(x) \times 1}{2}$. $\boxed{\text{Donc } \mathcal{A}_{OIM} = \dfrac{\sin(x)}{2}}$

Le triangle OIC est rectangle en I. Donc $\mathcal{A}_{OIC} = \dfrac{OI \times IC}{2} = \dfrac{1 \times \tan(x)}{2}$. $\boxed{\text{Donc } \mathcal{A}_{OIC} = \dfrac{\tan(x)}{2}}$

Pour calculer l'aire du secteur OIM, il suffit de faire jouer la proportionnalité, en sachant qu'il correspond à un angle de x radians, sur un disque de 2π radians.

L'aire totale d'un disque de rayon 1 est $\pi \times 1^2 = \pi$

L'aire du secteur OIM est donc $\mathcal{S}_{OIM} = \pi \times \dfrac{x}{2\pi}$. $\boxed{\text{Donc } \mathcal{S}_{OIM} = \dfrac{x}{2}}$

3) *L'énoncé vient de nous faire calculer trois aires. Peut-être que si on les comparait...*

Le triangle OIM est compris dans le secteur OIM, qui lui-même est compris dans le triangle OIC. Donc $\mathcal{A}_{OIM} \leq \mathcal{S}_{OIM} \leq \mathcal{A}_{OIC}$

Donc (d'après 2)), $\dfrac{\sin(x)}{2} \leq \dfrac{x}{2} \leq \dfrac{\tan(x)}{2}$ $\boxed{\text{avec } x \text{ quelconque dans } \left]\, 0\ ;\ \dfrac{\pi}{2} \right[}$

Maintenant, comment arriver à l'encadrement donné par l'énoncé ? Un premier réflexe est de regarder le terme central que nous avons ($\dfrac{x}{2}$) et de se demander par quoi le multiplier pour aboutir au terme central demandé ($\dfrac{x}{\sin(x)}$)

En multipliant tous les membres de cette inégalité par $\dfrac{x}{\sin(x)} \times \dfrac{2}{x}$, c'est-à-dire par $\dfrac{2}{\sin(x)}$, qui est positif puisque $x \in \left]\, 0\ ;\ \dfrac{\pi}{2} \right[$ (*je précise cette positivité pour m'assurer que le sens de l'inégalité ne doit pas changer*), on obtient :

$\dfrac{\sin(x)}{2} \times \dfrac{2}{\sin(x)} \leq \dfrac{x}{2} \times \dfrac{2}{\sin(x)} \leq \dfrac{\tan(x)}{2} \times \dfrac{2}{\sin(x)}$

Donc $1 \leq \dfrac{x}{\sin(x)} \leq \dfrac{\tan(x)}{\sin(x)}$. *N'oublions pas la définition rappelée par l'énoncé de $\tan(x)$...*

Donc $1 \leq \dfrac{x}{\sin(x)} \leq \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)} \times \dfrac{1}{\sin(x)}$

$\boxed{\text{Donc } 1 \leq \dfrac{x}{\sin(x)} \leq \dfrac{1}{\cos(x)}}$

4) D'après 3), pour tout h dans $\left]\, 0\ ;\ \dfrac{\pi}{2} \right[$, $1 \leq \dfrac{h}{\sin(h)} \leq \dfrac{1}{\cos(h)}$

Or, lorsque h devient très proche de 0, $\cos(h)$ devient très proche de $\cos(0) = 1$ (*par continuité du cosinus*), et $\dfrac{1}{\cos(h)}$ devient très proche de $\dfrac{1}{1} = 1$. Donc $\dfrac{h}{\sin(h)}$ est compris entre 1 et une quantité très proche de 1. Donc $\dfrac{h}{\sin(h)}$ devient très proche de 1 (*par ce qu'on appellera le théorème des gendarmes*).

Autrement dit, lorsque h devient très proche de 0 en étant positif (puisque l'encadrement est valable sur $\left]0\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$), $\frac{h}{\sin(h)}$ devient très proche de 1.

N'oublions pas le cas de figure où h devient très proche de 0 en étant négatif : dans ce cas, $-h$ devient très proche de 0 en étant positif, donc d'après ce qui précède, $\frac{-h}{\sin(-h)}$ devient très proche de 1. Or, $\frac{-h}{\sin(-h)} = \frac{-h}{-\sin(h)}$ (car la fonction sinus est impaire) $= \frac{h}{\sin(h)}$. Donc $\frac{h}{\sin(h)}$ devient très proche de 1 dans ce cas aussi.

On peut donc en conclure que lorsque h devient très proche de 0, $\frac{h}{\sin(h)}$ devient très proche de 1.

Son inverse $\frac{\sin(h)}{h}$ devient donc très proche de $\frac{1}{1}$, c'est-à-dire de 1 aussi.

Autrement dit : $\boxed{\lim\limits_{h \to 0} \frac{\sin(h)}{h} = 1}$