Dérivée d'une composée de fonctions

Ayoub Hajlaoui

Ces faquins ont saigné la formule maîtresse
Jadis bien enseignée à toutes les TS.

Énoncé : *(De la Première S à la Terminale S)* Temps conseillé : 1 heure

L'objectif de cet exercice est de déterminer, pour deux fonctions f et g dérivables *(ici, on considérera qu'elles le sont sur $\mathbb{R}$ pour simplifier les choses)*, la dérivée de la fonction composée k définie par $k(x) = g(f(x))$ pour tout réel x. *La fonction k est aussi notée $g \circ f$*

A l'issue de cet exercice, on aura montré la formule suivante, très utile pour bien des calculs de dérivées : $(g \circ f)'(x) = f'(x) \times g'\big(f(x)\big)$

On dit qu'une fonction f est continue en x si et seulement si $\lim\limits_{h \to 0} f(x+h) = f(x)$.
Une fonction est continue sur $\mathbb{R}$ est une fonction continue en tout $x \in \mathbb{R}$.
Enfin, on admet que toute fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Soient f et g deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, et soit x un réel. Soit k la fonction composée $k = g \circ f$ définie plus haut.

1) Pour un réel $h \neq 0$, on pose $h_2 = f(x+h) - f(x)$
a) Exprimer $\dfrac{g(f(x+h)) - g(f(x))}{f(x+h) - f(x)}$ en fonction de h_2 (sans h dans l'expression finale obtenue).
b) Quand h tend vers 0, vers quoi tend h_2 ?
2) En déduire que la fonction k est dérivable en tout réel x, et qu'on a : $k'(x) = f'(x) \times g'\big(f(x)\big)$
3) Application : calculer la dérivée de la fonction p (dérivable sur $\mathbb{R}$) définie de la manière suivante : $p(x) = (3x^2 - 7)^5$

Correction :

1) a) *On voit facilement quoi faire au dénominateur, qu'on remplacera tout simplement par h_2, mais que faire au numérateur ?*

$$g(f(x+h)) - g(f(x)) = g\big(f(x+h) - f(x) + f(x)\big) - g(f(x)) = g\big(h_2 + f(x)\big) - g(f(x))$$

Voilà donc l'astuce : faire apparaître $-f(x)$ pour pouvoir faire apparaître h_2, mais le compenser tout de suite après par $+f(x)$, parce qu'on est en maths et qu'on ne fait pas apparaître gratuitement les termes qu'on veut.

Donc $\dfrac{g(f(x+h)) - g(f(x))}{f(x+h) - f(x)} = \dfrac{g\big(h_2 + f(x)\big) - g(f(x))}{h_2} = \boxed{\dfrac{g\big(f(x) + h_2\big) - g(f(x))}{h_2}}$

$g\big(h_2 + f(x)\big) - g(f(x))$ *et* $g\big(f(x) + h_2\big) - g(f(x))$*, c'est la même chose. Mais voyez-vous pourquoi je préfère la dernière expression ?*

1) b) Répondre à la question revient à déterminer $\lim\limits_{h \to 0} f(x+h) - f(x)$.
D'après l'énoncé, f est dérivable sur $\mathbb{R}$. Elle est donc (d'après la propriété rappelée dans l'énoncé)

continue sur $\mathbb{R}$. Autrement dit, elle est continue en tout $x \in \mathbb{R}$. Cela veut dire (encore une fois d'après un rappel de l'énoncé) : $\lim_{h \to 0} f(x+h) = f(x)$. Donc $\lim_{h \to 0} f(x+h) - f(x) = f(x) - f(x)$

Et donc $\lim_{h \to 0} f(x+h) - f(x) = 0$

Autrement dit, $\boxed{\text{lorsque } h \text{ tend vers } 0,\ h_2 \text{ tend aussi vers } 0.}$

2) *Comment, en Première, a-t-on appris à montrer la dérivabilité d'une fonction ? Limite de taux d'accroissement sont les maîtres mots...*

On va s'intéresser à $\lim_{h \to 0} \frac{k(x+h) - k(x)}{h}$. Si cette limite et est finie, elle est égale à $k'(x)$.

Pour tout $h \neq 0$, $\frac{k(x+h) - k(x)}{h} = \frac{g(f(x+h)) - g(f(x))}{h}$.

Que faire à partir de là ? On reconnaît (en partie) la quantité introduite à la question 1)a). Essayons de la faire apparaître franchement, comme suit :

$$\frac{k(x+h) - k(x)}{h} = \frac{g(f(x+h)) - g(f(x))}{h} = \frac{g(f(x+h)) - g(f(x))}{f(x+h) - f(x)} \times \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

On connaît la limite quand h tend vers 0 du second membre du produit, vu que f est dérivable :

$\boxed{\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x)}$ *(rassurant, étant donné le résultat auquel on nous demande d'aboutir)*

Reste maintenant à déterminer $\lim_{h \to 0} \frac{g(f(x+h)) - g(f(x))}{f(x+h) - f(x)}$

D'après la question 1), $\frac{g(f(x+h)) - g(f(x))}{f(x+h) - f(x)} = \frac{g\left(f(x) + h_2\right) - g(f(x))}{h_2}$, et h_2 tend vers 0 lorsque h tend vers 0.

Donc $\lim_{h \to 0} \frac{g(f(x+h)) - g(f(x))}{f(x+h) - f(x)} = \lim_{h_2 \to 0} \frac{g\left(f(x) + h_2\right) - g(f(x))}{h_2}$

J'ai conscience d'aller un peu vite sur ce " donc ". Nous avons en fait effectué un changement de variable, en remplaçant la variable h par la variable h_2.

Si, à la question 1)b), on avait répondu " h_2 tend vers 3 lorsque h tend vers 0 ", on aurait dû écrire non pas $\lim_{h_2 \to 0}$... mais plutôt $\lim_{h_2 \to 3}$...

Intéressons-nous maintenant à $\lim_{h_2 \to 0} \frac{g\left(f(x) + h_2\right) - g(f(x))}{h_2}$.

Dans cette expression, h_2 est ce qu'on appelle une " variable muette " : son nom n'est pas important en soi. On pourrait très bien remplacer l'expression par $\lim_{t \to 0} \frac{g\left(f(x) + t\right) - g(f(x))}{t}$

Le résultat demandé par l'énoncé peut nous aiguillonner un peu...

$\lim_{h_2 \to 0} \frac{g\left(f(x) + h_2\right) - g(f(x))}{h_2}$ est en fait la limite du taux d'accroissement de la fonction g au point $a = f(x)$. Cette limite existe et est finie, puisque la fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$, et :

$$\boxed{\lim_{h_2 \to 0} \frac{g\left(f(x) + h_2\right) - g(f(x))}{h_2} = g'(a) = g'(f(x))}$$

Par produit de limites, on peut donc en conclure : $\lim_{h \to 0} \frac{k(x+h) - k(x)}{h} = f'(x) \times g'\left(f(x)\right)$

$\boxed{\text{La fonction } k \text{ est donc dérivable en tout réel } x \text{ (c-à-d sur } \mathbb{R}\text{), et on a : } k'(x) = f'(x) \times g'\left(f(x)\right).}$

3) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $p(x) = g(f(x))$ avec f et g les fonctions définies comme suit sur $\mathbb{R}$:
$f(x) = 3x^2 - 7$ et $g(x) = x^5$ *et avec cette définition, on a bien* $g(f(x)) = (f(x))^5 = (3x^2 - 7)^5$
f et g sont deux polynômes, donc dérivables sur $\mathbb{R}$.

De plus, pour tout réel x, $f'(x) = 3 \times 2x = 6x$ et $g'(x) = 5x^4$

D'après la formule démontrée dans la question précédente, p est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :
pour tout réel x, $p'(x) = f'(x) \times g'\left(f(x)\right)$

Pour avoir $g'\left(f(x)\right)$, on reprend tout simplement l'expression de $g'(x)$ et on remplace x par $f(x)$

Donc $p'(x) = 6x \times 5(f(x))^4 = 6x \times 5(3x^2 - 7)^4$

$\boxed{\text{Donc } p'(x) = 30x(3x^2 - 7)^4}$

Je souhaite bien du courage aux fous qui auront préféré développer l'expression de p pour ensuite dériver...

www.ayoub-et-les-maths.com
ayoub.hajlaoui.scolaire@gmail.com