Distances et triangle

Ayoub Hajlaoui

De ces mots secoureurs, je me ferai l'apôtre :
" Un calcul de longueur peut en cacher un autre. "

Énoncé : (temps conseillé : 30 min)

Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

1) Soient $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$ deux points du plan tels que $x_A \neq x_B$ et $y_A \neq y_B$. Démontrer que leur distance est $AB = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$

2) Comment s'exprime cette distance :

a) lorsque $x_A = x_B$?

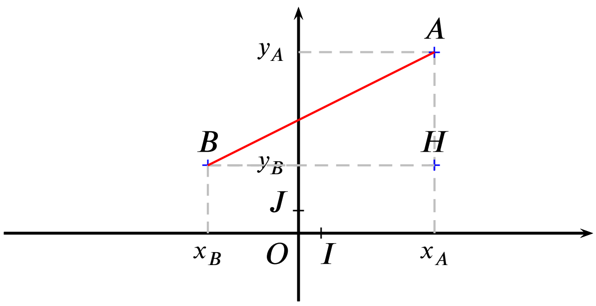
b) lorsque $y_A = y_B$?

3) Soit les points $T\left(2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}\right)$ et $W\left(0, 4\sqrt{2}\right)$. Que peut-on dire du triangle TWO ?

4) Calculer l'aire de ce triangle.

Correction :

1) *C'est une formule que vous connaissez peut-être déjà, mais on nous demande de la démontrer... Faisons une figure pour y voir plus clair. Plaçons deux points A et B quelconques. A quoi nous fait penser cette racine et ces carrés sous la racine ? Au théorème de Pythagore. Mais qui dit Pythagore dit triangle rectangle...*



Plaçons le point H, de même abscisse que A et de même ordonnée que B.

On aurait aussi pu faire le contraire, c'est-à-dire lui donner la même abscisse que B et la même ordonnée que A. Toujours dans l'idée d'avoir un triangle rectangle à disposition.

A et H ont la même abscisse. La droite (AH) est donc parallèle à l'axe des ordonnées (OJ).

B et H ont la même ordonnée. La droite (BH) est donc parallèle à l'axe des abscisses (OI).

Comme (OI) et (OJ) sont perpendiculaires (repère orthonormé...), les droites (BH) et (AH) sont donc aussi perpendiculaires.

Le triangle ABH est donc rectangle en H.

Donc d'après le théorème de Pythagore, $AB^2 = AH^2 + HB^2$. Autrement dit, $AB = \sqrt{AH^2 + HB^2}$

On y est presque ! On tient notre racine de somme de carrés...

$AH^2 = (y_A - y_B)^2$ *(si c'était juste AH et pas AH^2, il ne faudrait pas se tromper d'ordre dans la différence, pour ne pas obtenir une longueur négative. Mais comme on élève au carré ensuite, on se fiche de cet ordre...).* De même, $BH^2 = (x_A - x_B)^2$

$\boxed{\text{Donc } AB = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}}$

2) a) Lorsque $x_A = x_B$: $AB = \sqrt{(x_A - x_A)^2 + (y_A - y_B)^2} = \sqrt{0^2 + (y_A - y_B)^2} = \sqrt{(y_A - y_B)^2}$

Et là, ATTENTION à ne pas dire de bêtise... Beaucoup seraient tentés de dire que c'est égal à $(y_A - y_B)$. *Pas si ce dernier est négatif ! Voir le corrigé de l'exercice Inéquation du second degré pour plus de précisions.*

Donc dans ce cas, $\boxed{AB = |y_A - y_B|}$ *(valeur absolue de la différence)*

2) b) De même, lorsque $y_A = y_B$:
$AB = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_A)^2} = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + 0^2} = \sqrt{(x_A - x_B)^2}$

Donc dans ce cas, $\boxed{AB = |x_A - x_B|}$

3) *Réflexe assez évident : calculer les longueurs du triangle.*

En utilisant la formule rappelée en 1) :
$TW = \sqrt{(2\sqrt{2} - 0)^2 + (2\sqrt{2} - 4\sqrt{2})^2} = \sqrt{(2\sqrt{2})^2 + (-2\sqrt{2})^2}$
Donc $TW = \sqrt{2^2(\sqrt{2})^2 + 2^2(\sqrt{2})^2}$ *(on n'oublie pas d'élever tous les termes d'un produit au carré, et le − disparaît en élevant au carré)*
Donc $TW = \sqrt{4 \times 2 + 4 \times 2} = \sqrt{16} = 4$

De même, $TO = \sqrt{(2\sqrt{2} - 0)^2 + (2\sqrt{2} - 0)^2} = \sqrt{16} = 4$

Donc $TO = TW$. **Le triangle TWO est donc isocèle en T.**

Pourquoi s'arrêter en si bon chemin ? Peut-être est-il équilatéral ?

W et O ont la même abscisse 0. On est donc dans le cas de la 2) a).
Si on ne le voit pas, ce n'est pas grave, on peut reprendre la formule générale du 1) mais c'est une perte de temps.
Donc $WO = |4\sqrt{2} - 0| = |4\sqrt{2}| = 4\sqrt{2}$ *Rappelons que la valeur absolue d'un nombre est égale à ce nombre s'il est positif (ce qui est le cas ici), et à l'opposé de ce nombre s'il est négatif.*
WO n'étant pas égale aux deux autres longueurs, le triangle TWO n'est pas rectangle.

Mais je rêve ou je vous vois poser vos stylos ? ? Rasseyez-vous, ce n'est pas fini !
Piège assez classique dans un exercice de géométrie. J'ai fait exprès de poser la question de manière floue : " que dire du triangle ? " En parvenant à la conclusion qu'il est isocèle, êtes-vous sûrs d'avoir tout dit ?
Ne l'oubliez jamais, un triangle peut être isocèle ET rectangle. (Mais évidemment pas équilatéral rectangle, puisque tous les angles d'un triangle équilatéral mesurent 60 degrés) Voyons voir si TWO est rectangle... Si tel était le cas, l'hypoténuse serait le plus grand côté, à savoir WO ($4\sqrt{2} > 4$)

Dans le triangle TWO : $WO^2 = (4\sqrt{2})^2 = 4^2 \times (\sqrt{2})^2 = 16 \times 2 = 32$
D'autre part, $TW^2 + TO^2 = 4^2 + 4^2 = 16 + 16 = 32$
On a donc : $WO^2 = TW^2 + TO^2$
Donc d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle TWO est rectangle en T.
$\boxed{\text{Le triangle } TWO \text{ est donc isocèle rectangle en } T.}$

Au fait, c'est pour ça que je l'ai appelé TWO... Clin d'œil au faut qu'il est deux choses à la fois...

4) *Ceux qui n'ont pas vu en répondant à la question précédente que TWO est rectangle en T vont se compliquer la vie pour rien à cette question...*

Le triangle TWO est rectangle en T. Son aire est donc $\mathcal{A}_{TWO} = \dfrac{TW \times TO}{2} = \dfrac{4 \times 4}{2} = \dfrac{16}{2}$

$\boxed{\text{Donc } \mathcal{A}_{TWO} = 8.}$

Sans donner d'unités puisque l'énoncé n'en parle pas. Si l'énoncé donne une unité pour les longueurs, il faut s'assurer à ce que les longueurs utilisées dans le calcul aient la même unité, afin d'utiliser l'unité d'aire correspondante.

www.ayoub-et-les-maths.com
ayoub.hajlaoui.scolaire@gmail.com