Fonction composée

Ayoub Hajlaoui

Résolvez l'équation. Quelque chose vous gêne ?
Cette même fonction appliquée à la chaîne ?

Énoncé : *De la Seconde à la Première* (Temps conseillé : 40 min)

Soit la fonction f définie sur $]-\infty\,;\,-5[\,\cup\,]-5\,;\,+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{x-3}{x+5}$

1) Déterminer le domaine de définition de la fonction g définie par $g(x)=f\big(f(x)\big)$, sans chercher à déterminer l'expression générale de g.

2) Résoudre l'équation $g(x)=-\dfrac{5}{7}$ (sans chercher à déterminer l'expression générale de g).

3) Déterminer l'expression générale de g.

4) Retrouver les résultats de la question 2) à partir de cette expression générale.

Correction :

1) $f(x)$ est l'image de x par la fonction f.
$f(x)$ est bien défini si et seulement si x appartient au domaine de définition de f.
De même, $g(x)=f(f(x))$ est l'image de $f(x)$ par la fonction f.
$f(f(x))$ est bien défini si et seulement si $f(x)$ appartient au domaine de définition de f.
Autrement dit, $g(x)$ est bien défini si et seulement si $f(x)\neq -5$

Résolvons l'équation $f(x)=-5$ pour savoir qui il faut exclure du domaine de définition de g.
Pour tout $x\neq -5$, $f(x)=-5 \iff \dfrac{x-3}{x+5}=-5 \iff x-3=-5(x+5) \iff x-3=-5x-25$
$\iff x+5x=-25+3 \iff 6x=-22 \iff x=-\dfrac{22}{6}=-\dfrac{11}{3}$

$\boxed{\text{Le domaine de définition de } g \text{ est donc } D_g=\left]-\infty\,;\,-5\right[\,\cup\,\left]-5\,;\,-\frac{11}{3}\right[\,\cup\,\left]-\frac{11}{3}\,;\,+\infty\right[}$

qu'on peut aussi noter $\mathbb{R}\backslash\left\{-5,-\dfrac{11}{3}\right\}$. En effet, il ne faut pas aussi oublier d'exclure -5, car avant même de se poser la question de $f\big(f(x)\big)$, $f(x)$ n'est pas défini pour $x=-5$

2) Résolvons donc l'équation $g(x)=-\dfrac{5}{7}$ dans $\mathbb{R}\backslash\left\{-5,-\dfrac{11}{3}\right\}$

$g(x)=-\dfrac{5}{7} \iff f\big(f(x)\big)=-\dfrac{5}{7} \iff \dfrac{f(x)-3}{f(x)+5}=-\dfrac{5}{7} \iff f(x)-3=-\dfrac{5}{7}(f(x)+5)$
$\iff f(x)-3=-\dfrac{5}{7}f(x)-\dfrac{25}{7} \iff f(x)-3=-\dfrac{5}{7}f(x)-\dfrac{25}{7} \iff f(x)+\dfrac{5}{7}f(x)=-\dfrac{25}{7}+3$
$\iff \dfrac{12}{7}f(x)=-\dfrac{4}{7} \iff f(x)=-\dfrac{4}{7}\times\dfrac{7}{12} \iff f(x)=-\dfrac{1}{3}$

Résoudre l'équation $g(x)=-\dfrac{5}{7}$ revient donc à résoudre l'équation $f(x)=-\dfrac{1}{3}$

$f(x)=-\dfrac{1}{3} \iff \dfrac{x-3}{x+5}=-\dfrac{1}{3} \iff x-3=-\dfrac{1}{3}(x+5) \iff x-3=-\dfrac{1}{3}x-\dfrac{5}{3} \iff x+\dfrac{1}{3}x=-\dfrac{5}{3}+3$
$\iff \dfrac{4}{3}x=\dfrac{4}{3} \iff x=1$ $\boxed{\text{L'unique solution de l'équation } g(x)=-\frac{5}{7} \text{ est donc } x=1.}$

www.ayoub-et-les-maths.com
ayoub.hajlaoui.scolaire@gmail.com

3) Pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\left\{-5,-\frac{11}{3}\right\}$:

$$g(x)=f\left(f(x)\right)=\frac{f(x)-3}{f(x)+5}=\frac{\dfrac{x-3}{x+5}-3}{\dfrac{x-3}{x+5}+5}=\frac{\dfrac{x-3-3x-15}{x+5}}{\dfrac{x-3+5x+25}{x+5}}=\frac{\dfrac{-2x-18}{x+5}}{\dfrac{6x+22}{x+5}}$$

(Pour obtenir $f(f(x))$ on a remplacé x par $f(x)$ dans l'expression de $f(x)$)

Donc $g(x)=\dfrac{-2x-18}{x+5}\times\dfrac{x+5}{6x+22}=\dfrac{-2x-18}{6x+22}=\dfrac{2(-x-9)}{2(3x+11)}$

$$\boxed{\text{Donc } g(x)=\frac{-x-9}{3x+11}=-\frac{x+9}{3x+11}}$$

4) On peut alors résoudre " directement " l'équation $g(x)=-\dfrac{5}{7}$:

$$g(x)=-\frac{5}{7}\iff-\frac{x+9}{3x+11}=-\frac{5}{7}\iff\frac{x+9}{3x+11}=\frac{5}{7}\iff7(x+9)=5(3x+11)$$

$$\iff7x+63=15x+55\iff63-55=15x-7x\iff8=8x\iff x=1$$

On retrouve bien le résultat de la 2) : $\boxed{\text{l'unique solution de l'équation } g(x)=-\frac{5}{7} \text{ est } x=1.}$

www.ayoub-et-les-maths.com
ayoub.hajlaoui.scolaire@gmail.com