Fonction constante

Ayoub Hajlaoui

Exercice causant quelque sombre nuisance ?
L'ennemi s'exposant, montrons-lui ma puissance !

Énoncé : (temps conseillé : 20 min)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue en 0 telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(2x) = f(x)$
Montrer que f est constante.

Correction :

1) *Face à un énoncé avec aussi peu d'hypothèses, voyons voir toutes les informations que nous pouvons tirer de ces dernières...*

Par récurrence immédiate, on a : pour tout réel x, pour tout entier naturel n, $f(2^n x) = f(x)$.

*Cette expression " par récurrence immédiate " est à utiliser avec modération. Elle n'est à utiliser que lorsque la récurrence est VRAIMENT évidente, comme dans notre cas présent : si pour **tout réel** x,* $f(2x) = f(x)$, *on a alors* $f(4x) = f(2\times 2x) = f(2x) = f(x)$. *De même pour* $f(8x)$, *pour* $f(16x)$*...*

Mais que faire avec $f(2^n x)$ *? Peut-être faire tendre n vers* $+\infty$ *? Mais alors, si* $x \neq 0$, $2^n x$ *tendrait vers* $+\infty$ *ou* $-\infty$ *(suivant le signe de x). Quelle utilité pour nous ?*

Ça bloque... Mais avons-nous exploité entièrement l'énoncé ? Ce dernier nous parle de continuité de f en 0*... Peut-être faudrait-il donc se débrouiller pour avoir une quantité qui tende vers* 0*...*

Dire " pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(2x) = f(x)$ " revient à dire" pour tout $y \in \mathbb{R}$, $f(y) = f(\frac{y}{2})$ " (en effectuant tout simplement le changement de variable $y = 2x$)

On a alors, par récurrence immédiate : pour tout réel y, pour tout entier naturel n, $f(y) = f(\frac{y}{2^n})$

" L'ennemi s'exposant, montrons-lui ma puissance "... Oui, je suis fier du jeu de mot.

Autrement dit, pour un réel y quelconque, l'égalité $f(y) = f(\frac{y}{2^n})$ est valable pour tout entier naturel n. Elle reste donc vraie par passage à la limite.

Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{y}{2^n} = 0$

On a envie d'en conclure rapidement : $\lim\limits_{n\to+\infty} f(\frac{y}{2^n}) = f(0)$. *Mais attention à ne pas louper l'argument phare qui nous permet de le dire !*

La fonction f est continue en 0 d'après l'énoncé. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f(\frac{y}{2^n}) = f(0)$

En reprenant l'égalité $f(y) = f(\frac{y}{2^n})$, on a alors : $f(y) = f(0)$.
Et cela est valable pour n'importe quel réel y.

L'image de tout y par f est la même que l'image de 0 *par f...*

$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est donc constante sur } \mathbb{R}.}$

www.ayoub-et-les-maths.com
ayoub.hajlaoui.scolaire@gmail.com