Formule du triangle de Pascal

Ayoub Hajlaoui

Nuances débonnaires, infinité d'appâts !
On a l'art du binaire ou bien on ne l'a pas.

Énoncé : (temps conseillé : 25 min)

On rappelle que pour tout entier naturel n non nul, $n!$ est le produit des entiers consécutifs de 1 jusqu'à n (et par convention, $0! = 1$).
De même, on rappelle que pour tout entier naturel n, pour tout entier naturel $k \leq n$, $\binom{n}{k}$ est le nombre de parties à k éléments d'un ensemble à n éléments, et $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $k \leq n-1$

1) Démontrer par le calcul : $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$ *(formule du triangle de Pascal)*

2) Soit E un ensemble à $n+1$ éléments et soit a un élément de E. On s'intéresse au nombre de parties à $k+1$ éléments de E.
a) Combien y a-t-il de parties à $k+1$ éléments de E contenant a ? Combien y a-t-il de parties à $k+1$ éléments de E ne contenant pas a ?
b) Retrouver la formule du triangle de Pascal.

Correction :

1) $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!} + \dfrac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!}$

On sent qu'il faut mettre tout ça sous le même dénominateur, mais lequel choisir ?
On veut tomber sur $\binom{n+1}{k+1}$, *c'est-à-dire sur* $\dfrac{(n+1)!}{(k+1)!(n+1-k-1)!} = \dfrac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!}$
Voilà qui nous indique le choix judicieux du dénominateur... Reprenons nos calculs.
Mais juste avant, rappelons (ou remarquons) que pour tout entier naturel p, $(p+1)! = p! \times (p+1)$
En effet,pour passer du produit des entiers naturels de 1 *à p au produit des entiers naturels de* 1 *à* $p+1$, *il suffit de multiplier par* $p+1$.

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} = \frac{(k+1) \times n!}{(k+1) \times k!(n-k)!} + \frac{n! \times (n-k)}{(k+1)!(n-k-1)! \times (n-k)}$$

Donc $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \dfrac{(k+1) \times n!}{(k+1)!(n-k)!} + \dfrac{n! \times (n-k)}{(k+1)!(n-k)!} = \dfrac{(k+1) \times n! + n! \times (n-k)}{(k+1)!(n-k)!}$

Donc (en factorisant par $n!$ au numérateur) $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \dfrac{n!(k+1+n-k)}{(k+1)!(n-k)!}$

Autrement dit, $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \dfrac{n!(n+1)}{(k+1)!(n-k)!} = \dfrac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!}$. Donc $\boxed{\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}}$

2) a) *Dans une partie à* $k+1$ *éléments de E contenant a, sur combien d'éléments avons-nous le choix ?*

www.ayoub-et-les-maths.com
ayoub.hajlaoui.scolaire@gmail.com

Pour former une partie à $k+1$ éléments de E contenant a, il y a un choix à faire sur k éléments (puisqu'on doit prendre a et qu'il reste donc $k+1-1=k$ autres éléments à choisir). Ces k éléments sont à choisir parmi tous les éléments de E sauf a (puisque a est déjà pris). Ces $\boxed{k \text{ éléments}}$ sont donc à choisir $\boxed{\text{parmi } n \text{ éléments}}$ (puisque E contient $n+1$ éléments).

$\boxed{\text{Il y a donc } \binom{n}{k} \text{ parties à } k+1 \text{ éléments de } E \text{ contenant } a.}$

Pour former une partie à $k+1$ éléments de E ne contenant pas a, il faut choisir $k+1$ éléments parmi tous les éléments de E sauf a (puisqu'il ne faut pas prendre a). Il faut donc choisir $\boxed{k+1 \text{ éléments}}$ $\boxed{\text{parmi } n \text{ éléments.}}$

$\boxed{\text{Il y a donc } \binom{n}{k+1} \text{ parties à } k+1 \text{ éléments de } E \text{ ne contenant pas } a.}$

2) b) En sommant le nombre de parties à $k+1$ éléments de E contenant a et le nombre de parties à $k+1$ éléments de E ne contenant pas a, on obtient logiquement le nombre de parties à $k+1$ éléments de E (ensemble de $n+1$ éléments). Ce dernier nombre est, par définition, égal à $\binom{n+1}{k+1}$.

On retrouve bien : $\boxed{\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}}$

www.ayoub-et-les-maths.com
ayoub.hajlaoui.scolaire@gmail.com