Inégalité de Cauchy-Schwarz

Ayoub Hajlaoui

Mais que me dit mon flair, que leurs marchands endorment ?
Que ces produits ont l'air en deçà de la norme.

Énoncé : *De la Première S à la Terminale S* Temps conseillé : 55 min

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs *(de dimension quelconque, mais vous pouvez imaginez que ce sont des vecteurs du plan pour vous " rassurer ", même si ça ne jouera pas sur les calculs)*

Le but de cet exercice est double :

- démontrer l'inégalité $|\vec{u}.\vec{v}| \leq ||\vec{u}||\ ||\vec{v}||$ *(c'est l'inégalité de Cauchy-Scwharz)*
(où $|\vec{u}.\vec{v}|$ est la valeur absolue du produit scalaire $\vec{u}.\vec{v}$ et $||\vec{u}||$ est la norme de $\vec{u}$)
- démontrer que l'égalité $|\vec{u}.\vec{v}| = ||\vec{u}||\ ||\vec{v}||$ est vraie si et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires

1) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = ||t\vec{u} + \vec{v}||^2$

a) Vérifier l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans le cas où $\vec{u}$ est le vecteur nul. Par la suite, on supposera $\vec{u} \neq 0$

b) Montrer que pour tout réel t, $f(t) = t^2||\vec{u}||^2 + 2t\vec{u}.\vec{v} + ||\vec{v}||^2$

c) Quelle est la nature de la fonction f ? Quel est son signe ?

d) En déduire l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

2) On veut maintenant montrer que cette inégalité devient égalité si et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

a) Montrer que si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, on a : $|\vec{u}.\vec{v}| = ||\vec{u}||\ ||\vec{v}||$

b) Réciproquement, si $|\vec{u}.\vec{v}| = ||\vec{u}||\ ||\vec{v}||$, que dire de la fonction polynôme f ? En déduire que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

c) Conclure.

Correction :

1) a) Si $\vec{u} = \vec{0}$: $|\vec{u}.\vec{v}| = |\vec{0}.\vec{v}| = |0| = 0$ et $||\vec{u}||\ ||\vec{v}|| = ||\vec{0}||\ ||\vec{v}|| = 0 \times\ ||\vec{v}|| = 0$

Or, $0 \leq 0$ *Eh oui, $\leq$ comprend aussi le cas d'égalité...*

$\boxed{\text{Donc on a bien } |\vec{u}.\vec{v}| \leq ||\vec{u}||\ ||\vec{v}|| \text{ dans le cas où } \vec{u} = \vec{0}}$

1) b) *Prudence sur cette question : on peut avoir envie d'utiliser une identité remarquable sans trop réfléchir, mais n'oubliez pas que $t\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont des vecteurs et non des réels... Mais alors, que faire ? $t\vec{u} + \vec{v}$ est un vecteur. Que savons-nous de la norme d'un vecteur élevée au carré ?*

On rappelle que pour tout vecteur $\vec{w}$, $||\vec{w}||^2 = \vec{w}.\vec{w}$

Or, $f(t) = ||t\vec{u} + \vec{v}||^2$. Donc $f(t) = (t\vec{u} + \vec{v}).(t\vec{u} + \vec{v})$

Et nous savons qu'il y a distributivité du produit scalaire sur l'addition...

Donc $f(t) = (t\vec{u}).(t\vec{u}) + (t\vec{u}).\vec{v} + \vec{v}.(t\vec{u}) + \vec{v}.\vec{v}$

Donc $f(t) = t^2\vec{u}.\vec{u} + t\vec{u}.\vec{v} + t\vec{v}.\vec{u} + \vec{v}.\vec{v}$ Or, $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$ et $\vec{u}.\vec{u} = ||\vec{u}||^2$ et $\vec{v}.\vec{v} = ||\vec{v}||^2$

$\boxed{\text{Donc } f(t) = t^2||\vec{u}||^2 + 2t\vec{u}.\vec{v} + ||\vec{v}||^2}$

1) c) *La nature de la fonction f... Il ne faut pas oublier que la variable est t...*

$||\vec{u}||^2$, $2\vec{u}.\vec{v}$ et $||\vec{v}||^2$ sont des nombres réels. La fonction f s'exprime donc sous la forme :

$f(t) = at^2 + bt + c$ (avec $a = ||\vec{u}||^2$, $b = 2\vec{u}.\vec{v}$ et $c = ||\vec{v}||^2$)

Notons bien que $a \neq 0$ car on suppose (cf énoncé) $\vec{u} \neq 0$, ce qui implique $||\vec{u}|| \neq 0$ (et donc $||\vec{u}||^2 \neq 0$)

$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est donc une fonction polynôme du second degré.}}$

Il était important de s'assurer que a n'est pas nul pour pouvoir dire que f est un polynôme du second degré et non une fonction affine.

Seconde partie de la question : quel est le signe de f ? Si vous avez l'habitude de vous jeter tête baissée sur l'exercice, sans bien voir ce que l'énoncé vous donne, vous risquez de vous empêtrer dans la voie " classique ", à savoir l'étude par le calcul du signe d'un polynôme du second degré...

Pour tout réel t, $f(t) = ||t\vec{u} + \vec{v}||^2$ (par définition)

$f(t)$ est un carré, donc positif. $\boxed{\text{La fonction } f \text{ est donc positive sur } \mathbb{R}.}$

1) d) *Comment déduire, de ce qui précède, une quelconque inégalité ?*

Nous savons que f est une fonction polynôme du second degré, de signe constant (puisque positive).

Combien un polynôme du second degré de signe constant peut-il avoir de racines ?

f a donc soit 0 racine, soit 1 racine. Autrement dit, elle a au plus une racine. (Si elle en avait deux, elle changerait de signe)

Et que dire du discriminant d'un polynôme du second degré qui a au plus une racine ?

Le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac = (2\vec{u}.\vec{v})^2 - 4||\vec{u}||^2||\vec{v}||^2$ est donc négatif ou nul (car s'il était strictement positif, f aurait deux racines distinctes).

Nous venons donc de dire : $(2\vec{u}.\vec{v})^2 - 4||\vec{u}||^2||\vec{v}||^2 \leq 0$

Autrement dit, $4(\vec{u}.\vec{v})^2 - 4||\vec{u}||^2||\vec{v}||^2 \leq 0$. Donc $4(\vec{u}.\vec{v})^2 \leq 4||\vec{u}||^2||\vec{v}||^2$

Et donc $(\vec{u}.\vec{v})^2 \leq ||\vec{u}||^2||\vec{v}||^2$

On y est presque ! Appliquons la fonction racine aux deux membres (positifs) de cette inégalité. Mais pas comme des débutants...

La fonction racine carrée est croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$. On a donc $\sqrt{(\vec{u}.\vec{v})^2} \leq \sqrt{||\vec{u}||^2||\vec{v}||^2}$

C'est le fait que la fonction est croissante qui nous permet de ne pas changer le sens de l'inégalité après l'avoir appliquée aux deux membres.

$\sqrt{(\vec{u}.\vec{v})^2} = |\vec{u}.\vec{v}|$

Attention, en général, $\sqrt{x^2} = |x|$ et pas toujours x (par exemple $\sqrt{(-5)^2} = 5$ et pas -5)

Et en l'occurrence, le produit scalaire $\vec{u}.\vec{v}$ pourrait être négatif, d'où l'importance de la valeur absolue.

Et $\sqrt{||\vec{u}||^2||\vec{v}||^2} = ||\vec{u}||\ ||\vec{v}||$

Pourquoi n'ai-je pas mis de valeur absolue dans ce cas ? J'aurais pu, mais elle aurait été inutile, car une norme est toujours positive (et donc un produit de normes est toujours positif).

On obtient donc l'inégalité suivante : $\boxed{|\vec{u}.\vec{v}| \leq ||\vec{u}||\ ||\vec{v}||}$

2) a) Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, il existe un réel k tel que $\vec{v} = k\vec{u}$

On a alors, d'une part : $|\vec{u}.\vec{v}| = |\vec{u}.(k\vec{u})| = |k||\vec{u}.\vec{u}| = |k|\ ||\vec{u}||^2$

N'oubliez pas de garder la valeur absolue sur le k en le sortant

Et d'autre part : $||\vec{u}||\ ||\vec{v}|| = ||\vec{u}||\ ||k\vec{u}|| = ||\vec{u}||\ |k|\ ||\vec{u}|| = |k|\ ||\vec{u}||^2$

Pareil, n'oubliez pas que $||k\vec{u}|| = |k|\ ||\vec{u}||$ (pour s'assurer de conserver la positivité de la norme au cas où k serait négatif)

On en conclut donc que si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, $\boxed{|\vec{u}.\vec{v}| = ||\vec{u}||\ ||\vec{v}||}$

2) b) Si $|\vec{u}.\vec{v}| = ||\vec{u}||\ ||\vec{v}||$:
Rappelons (calculs de la 1)d)) que le discriminant de la fonction polynôme f est
$\Delta = (2\vec{u}.\vec{v})^2 - 4||\vec{u}||^2||\vec{v}||^2 = 4|\vec{u}.\vec{v}|^2 - 4||\vec{u}||^2||\vec{v}||^2$ *(remarquons $x^2 = |x|^2$)*
Or, $|\vec{u}.\vec{v}| = ||\vec{u}||\ ||\vec{v}||$, et donc (en élevant au carré) $|\vec{u}.\vec{v}|^2 = ||\vec{u}||^2\ ||\vec{v}||^2$
Donc $\Delta = 4||\vec{u}||^2||\vec{v}||^2 - 4||\vec{u}||^2||\vec{v}||^2 = 0$
La fonction polynôme f admet donc une unique racine (qu'on peut noter t_1).

Mais comment en déduire que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires ? Revenons à la définition initiale de f...

Donc $f(t_1) = 0$ avec $f(t_1) = ||t_1\vec{u} + \vec{v}||^2$. Donc $||t_1\vec{u} + \vec{v}||^2 = 0$. Et donc $||t_1\vec{u} + \vec{v}|| = 0$
Vous en connaissez beaucoup, des vecteurs dont la norme est nulle ?
Donc $t_1\vec{u} + \vec{v} = \vec{0}$
Donc $\vec{v} = -t_1\vec{u}$. Autrement dit, $\vec{v} = k\vec{u}$ en prenant $k = -t_1$

Donc si $|\vec{u}.\vec{v}| = ||\vec{u}||\ ||\vec{v}||$, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

2) c) Les résultats de la 2)a) et de la 2)b) nous permettent de conclure l'équivalence suivante :
$|\vec{u}.\vec{v}| = ||\vec{u}||\ ||\vec{v}||$ si et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

Les résultats obtenus sont cohérents avec ce que vous savez du cours pour $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan (et, en Terminale, de l'espace). A savoir : $\vec{u}.\vec{v} = \cos(\vec{u}, \vec{v})||\vec{u}||\ ||\vec{v}||$. *Ce qui implique :*
$|\vec{u}.\vec{v}| = |\cos(\vec{u}, \vec{v})|\ ||\vec{u}||\ ||\vec{v}||$, *avec* $-1 \leq \cos(\vec{u}, \vec{v}) \leq 1$ *et donc* $0 \leq |\cos(\vec{u}, \vec{v})| \leq 1$
On a donc bien $|\vec{u}.\vec{v}| \leq ||\vec{u}||\ ||\vec{v}|$.

Par ailleurs, $|\vec{u}.\vec{v}| = ||\vec{u}||\ ||\vec{v}|$ *si et seulement si* $|\cos(\vec{u}, \vec{v})|\ ||\vec{u}||\ ||\vec{v}|| = ||\vec{u}||\ ||\vec{v}||$.
Ce qui donne, pour $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls : $|\cos(\vec{u}, \vec{v})| = 1$ *(c'est-à-dire* $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = 1$ *ou* -1*)*
Ceci est vrai si et seulement si l'angle $(\vec{u}, \vec{v})$ *vérifie* $(\vec{u}, \vec{v}) = k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$
Autrement dit, si et seulement si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

www.ayoub-et-les-maths.com
ayoub.hajlaoui.scolaire@gmail.com