Introduction au nombre dérivé

Ayoub Hajlaoui

La pente entre deux points ? Je sais, c'est dans la poche !
Voyons ce qu'il advient quand ces points se rapprochent.

Énoncé : (temps conseillé : 35 min)

On note f la fonction carré (définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$), et C_f sa représentation graphique dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

Soit h un nombre réel non nul.

Soit A le point d'abscisse 1 sur la courbe C_f, et soit A_h le point d'abscisse $1 + h$ sur la courbe C_f.

1) Dans cette question, on prend $h = \dfrac{1}{4}$. Déterminer le coefficient directeur a_h de la droite (AA_h), puis une équation de cette droite.

2) Même question en prenant $h = \dfrac{1}{10}$.

3) Quand h devient proche de 0, vers quelle valeur le coefficient directeur de (AA_h) a-t-il l'air de tendre ?

4) On revient dans le cas général (h est un réel non nul dont on ne connaît pas la valeur). Exprimer le coefficient directeur de la droite (AA_h) en fonction de h *(en vous débrouillant pour qu'il n'y ait plus de fraction dans l'expression finale)*. Cette expression conforte-t-elle l'intuition de la question 3 ?

5) Soit x un réel quelconque. On considère maintenant M, le point d'abscisse x sur la courbe C_f, et M_h, le point d'abscisse $x + h$ sur la courbe C_f. Exprimer le coefficient directeur c_h de la droite (MM_h) en fonction de x et h. Vers quoi ce coefficient tend-il quand h devient proche de 0 ?

Le résultat est appelé nombre dérivé de la fonction carré au point d'abscisse x.

Correction :

1) *Pour avoir le coefficient directeur de la droite (AA_h), déterminons d'abord les coordonnées complètes des deux points A et A_h.*

Le point A est sur la courbe C_f, représentation graphique de la fonction f. L'ordonnée de A est donc l'image de l'abscisse de A par la fonction f. *(propriété assez simple que les élèves ont souvent tendance à oublier, ou du moins à oublier d'exploiter)*

L'abscisse de A étant 1, l'ordonnée de A est donc $f(1) = 1^2 = 1$.

L'abscisse de A_h étant $1 + h = 1 + \dfrac{1}{4} = \dfrac{5}{4}$, l'ordonnée de A_h est donc $f\left(\dfrac{5}{4}\right) = \left(\dfrac{5}{4}\right)^2 = \dfrac{5^2}{4^2} = \dfrac{25}{16}$

Bien sûr, on n'oublie pas d'élever numérateur ET dénominateur au carré.

Le coefficient directeur de la droite (AA_h) est donc $a_h = \dfrac{\frac{25}{16} - 1}{\frac{5}{4} - 1} = \dfrac{\frac{9}{16}}{\frac{1}{4}} = \dfrac{9}{16} \times 4$. Donc $\boxed{a_h = \dfrac{9}{4}}$

Pour avoir une équation de la droite (AA_h), connaissant déjà son coefficient directeur a_h, il suffit d'utiliser les coordonnées d'un point de la droite. Prenons les coordonnées de A pour plus de simplicité.

Cherchons b_h tel que $y = a_h x + b_h$ soit une équation de la droite (AA_h) a une équation de la forme.

Je l'appelle b_h pour rappeler qu'il dépend de h, vous auriez très bien pu l'appeler b par exemple.

Vu que A est sur la droite (AA_h), ses coordonnées vérifient l'équation de la droite. Autrement dit : $1 = a_h \times 1 + b_h$ *(vu les coordonnées de A, on a remplacé x par 1 et y par 1)*

Donc $b_h = 1 - a_h = 1 - \dfrac{9}{4} = -\dfrac{5}{4}$. $\boxed{\text{Une équation de } (AA_h) \text{ est donc } y = \dfrac{9}{4}x - \dfrac{5}{4}}$

www.ayoub-et-les-maths.com
ayoub.hajlaoui.scolaire@gmail.com

2) L'abscisse de A_h devient $1+h = 1+\frac{1}{10} = \frac{11}{10}$, l'ordonnée de A_h est donc :

$f\left(\frac{11}{10}\right) = \left(\frac{11}{10}\right)^2 = \frac{11^2}{10^2} = \frac{121}{100}$

Le coefficient directeur de la droite (AA_h) devient donc $a_h = \dfrac{\frac{121}{100}-1}{\frac{11}{10}-1} = \dfrac{\frac{21}{100}}{\frac{1}{10}} = \frac{21}{100} \times 10 = \frac{21}{10}$.

Donc $\boxed{a_h = \frac{21}{10} = 2,1}$

De même que dans la question précédente : $b_h = 1 - a_h = 1 - \frac{21}{10} = -\frac{11}{10}$.

$\boxed{\text{Une équation de } (AA_h) \text{ devient donc } y = \frac{21}{10}x - \frac{11}{10}}$

3) Pour $h = \frac{1}{4}$, on a $a_h = \frac{9}{4} = 2,25$. Et pour $h = \frac{1}{10}$, on a $a_h = \frac{21}{10} = 2,1$.

$\boxed{\text{Quand } h \text{ devient proche de } 0,\ a_h \text{ a l'air de tendre vers } 2.}$

4) Dans le cas général, l'abscisse de A_h est $1+h$ et son ordonnée est donc $(1+h)^2$.
Le coefficient directeur de (AA_h) s'exprime donc ainsi :

$a_h = \dfrac{(1+h)^2-1}{(1+h)-1} = \dfrac{(1+h)^2-1}{h}$

Ici, si vous ne voyez rien de particulier à faire, développez. Mais moi, je vois une belle identité remarquable pour factoriser (ça revient à peu près au même)

Donc $a_h = \dfrac{(1+h)^2-1^2}{h} = \dfrac{(1+h+1)(1+h-1)}{h} = \dfrac{(2+h)h}{h}$. $\boxed{\text{Donc } a_h = 2+h.}$

Lorsque h devient proche de 0, $2+h$ devient logiquement proche de 2.

$\boxed{\text{L'expression obtenue pour } a_h \text{ va donc bien dans le sens de l'intuition de la question 3.}}$

5) M a pour abscisse x et donc (puisqu'il est sur la courbe de f) pour ordonnée x^2.
M_h a pour abscisse $x+h$ et donc (puisqu'il est sur la courbe de f) pour ordonnée $(x+h)^2$.

Le coefficient directeur c_h de la droite (MM_h) s'exprime donc ainsi :

$c_h = \dfrac{(x+h)^2-x^2}{(x+h)-x} = \dfrac{(x+h)^2-x^2}{h}$

Je pourrais factoriser comme dans la question précédente, mais allez, développons cette fois-ci, pour varier les plaisirs...

Donc $c_h = \dfrac{x^2+2xh+h^2-x^2}{h} = \dfrac{2xh+h^2}{h} = \dfrac{h(2x+h)}{h}$. $\boxed{\text{Donc } c_h = 2x+h}$

$\boxed{\text{Quand } h \text{ devient proche de } 0,\ c_h \text{ tend vers } 2x.}$

Le nombre dérivé de la fonction carré au point d'abscisse x est $2x$.
On retrouve notamment le résultat de la 4) en prenant $x = 1$.
(Le nombre dérivé de la fonction carré au point d'abscisse 1 est 2)