Introduction aux primitives

Ayoub Hajlaoui

Si sur toi j'ai les yeux rivés,
C'est que je sais ta dérivée.

Énoncé : *De la Première S à la Terminale S* (Temps conseillé : 25 min)

Soit f et g_0 deux fonctions définies sur un intervalle I, telles que g_0 est dérivable sur I et $g_0' = f$. On dit alors que g_0 est une primitive de f.

1) Vérifier que pour toute constante k, la fonction g_k définie sur I par $g_k(x) = g_0(x) + k$ est aussi une primitive de f.

2) Réciproquement, montrer que si g est une primitive de f, alors g est de la forme :
$g(x) = g_0(x) + k$, où k est une constante.

3) La fonction f a donc une infinité de primitives, égales à une constante près. Que peut-on dire du sens de variation de ces primitives ?

Correction :

1) *Montrons tout simplement que g_k a pour dérivée f.*
Pour toute constante k, la fonction g_k est dérivable sur I (par somme de fonctions dérivables).
Et k étant constante, on a, pour tout $x \in I$: $g_k'(x) = g_0'(k) + 0$. Donc $g_k'(x) = f(x)$
Autrement dit, $g_k' = f$. $\boxed{g_k' \text{ est bien une primitive de } f.}$

2) Si g est une primitive de f, on a, par définition $g' = f$. Or, on a aussi $g_0' = f$.
Donc $g' - g_0' = f - f = 0$. Donc $(g - g_0)' = 0$

Attention, ce qui me permet de passer de $g' - g_0'$ à $(g - g_0)'$, c'est le fait que la dérivée de la somme (ou différence) de deux fonctions, c'est la somme (ou différence) des dérivées de ces deux fonctions. Ça aurait été faux pour la dérivée du produit ou du quotient de deux fonctions (vous avez appris des formules plus compliquées dans ces cas).

La dérivée de la fonction $g - g_0$ est nulle. $g - g_0$ est donc constante.
Donc il existe une constante réelle k telle que : pour tout $x \in I$, $g(x) - g_0(x) = k$
$\boxed{\text{Donc } g \text{ est de la forme : } g(x) = g_0(x) + k}$

3) Le sens de variation d'une fonction dérivable est donné par le signe de sa dérivée. Or, toutes les primitives de f ont la même dérivée f.
$\boxed{\text{Toutes les primitives de } f \text{ ont donc le même sens de variation.}}$

www.ayoub-et-les-maths.com
ayoub.hajlaoui.scolaire@gmail.com