Irrationalité de $\sqrt{2}$

Ayoub Hajlaoui

D'absurde égalité en logique vautrée,
Irrationalité, je puis te démontrer.

Énoncé : (temps conseillé : 25 min)

1) On suppose que $\sqrt{2}$ est rationnel, et que son écriture irréductible est $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, avec p, q deux entiers naturels strictement positifs. Montrer que p est pair.

2) En relevant une absurdité sur la parité de q, en déduire que $\sqrt{2}$ n'est en fait pas rationnel.

Correction :

1) *Pair, pair... Un entier pair, c'est tout simplement un nombre qui s'écrit* $2n$ *avec* n *un autre entier. Reste à savoir comment faire apparaître ce* 2 *ici...*

$\dfrac{p}{q} = \sqrt{2}$ donc $p = \sqrt{2}q$, et donc $p^2 = 2q^2$ *(attention à n'oublier personne en élevant au carré)*

$p^2 = 2q^2$ avec q^2 entier, donc p^2 est pair. p^2 *est pair, d'accord, mais que dire de* p *?*

Si p était impair, $p^2 = p \times p$ serait forcément impair (par produit de deux nombres impairs). Mais p^2 est pair. Donc, nécessairement, $\boxed{p \text{ est pair.}}$

2) *Si on écrit* $q = \dfrac{p}{\sqrt{2}}$ *sans rien voir d'autre, on risque de tourner en rond. Écarquillons les yeux : que venons-nous de montrer au sujet de* p *?*

D'après 1), p est pair. Donc il existe $n \in \mathbb{N}^*$ *(non nul car* p *est non nul d'après l'énoncé)* tel que $p = 2n$.

Donc $q = \dfrac{p}{\sqrt{2}} = \dfrac{2n}{\sqrt{2}} = n\sqrt{2}$

Et donc $q^2 = n^2 \times 2$. Donc q^2 est pair. Et donc (par ce même raisonnement qui nous a permis de passer de " p^2 pair " à " p pair ") : q est pair.

Mais en quoi est-ce dérangeant ? Absurde ? Relisez bien l'énoncé, sans en oublier aucun mot...

L'écriture $\dfrac{p}{q}$ est supposée irréductible, c'est-à-dire qu'on ne doit plus pouvoir simplifier la fraction $\dfrac{p}{q}$. Or, nous avons montré que p et q étaient tous deux pairs (donc divisibles par 2). Donc la fraction $\dfrac{p}{q}$ est simplifiable par 2, ce qui est absurde puisque ça contredit l'énoncé. Donc la supposition de départ (" $\sqrt{2}$ rationnel ") est fausse. Donc $\boxed{\sqrt{2} \text{ est irrationnel.}}$

Mais pourquoi n'est-ce pas juste le fait d'avoir ajouté, dans la supposition de départ " et que son écriture irréductible est $\sqrt{2} = \dfrac{p}{q}$ *" qui est absurde ? Parce que le fait que* $\sqrt{2}$ *puisse s'écrire sous forme de fraction irréductible découle directement de sa rationalité supposée. (Tout nombre rationnel peut s'écrire sous forme d'une fraction irréductible.)*

www.ayoub-et-les-maths.com
ayoub.hajlaoui.scolaire@gmail.com