La bataille de la somme

Ayoub Hajlaoui

Accrétion planétaire, en quoi consistes-tu ?
De baryon en poussière, de poussière en fétu.

Énoncé : (temps conseillé : 1 heure 15 min)

Le titre est trompeur. Il ne s'agit pas ici d'étudier les deux batailles de la Première Guerre Mondiale qui portent ce nom (1916, 1918). Non, nous allons nous-mêmes batailler avec les sommes. De cette manière, nous aiderons un ours en peluche à vaincre les monstres peuplant les cauchemars de la petite fille qui le possède. Vous ne voyez pas le lien ? A vrai dire, à ce stade de l'écriture, moi non plus...

I *Retrouvailles à l'infini*

Cette petite fille est assez spéciale, et ses cauchemars aussi... Dans son premier cauchemar, une distance d'un mètre la sépare de son nounours. Elle fait alors un pas de longueur la moitié de cette distance et s'arrête. Puis elle fait un pas de longueur la moitié du dernier pas. Et ainsi de suite. Comment expliquer mathématiquement que la distance qui la sépare de son nounours tend vers 0 ?
Indication : si le nounours pouvait penser à la somme d'une suite géométrique...

II *Quand l'infiniment petit donne l'infiniment grand*

La petite fille se réveille en sursaut. Elle pense avoir compris que si la somme positive de la partie I convergeait, c'était parce qu'on rajoutait à chaque fois un terme de plus en plus petit et qui tendait vers 0. Mais le nounours n'en est pas si sûr...

Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n}$

1) Montrer que pour tout entier $k \geq 2$,

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt \leq \frac{1}{k}$$

2) En déduire que pour tout entier $n \geq 1$,

$$\int_2^{n+1} \frac{1}{t} dt + 1 \leq u_n$$

3) En déduire la limite de la suite (u_n). Que peut répondre le nounours à la petite fille ?

III *Quand l'infiniment petit ne donne pas l'infiniment grand*

Cependant, le nounours tient à rassurer la petite fille. Si on prend maintenant $v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$, on peut montrer que la suite (v_n) converge. En vous inspirant de la partie précédente, montrez-le.

IV *Dragon complexe*

Ayant compris que la convergence des sommes positives dépendait du terme général de la somme ($\frac{1}{k}$ ou $\frac{1}{k^2}$...), la petite fille se rendort tranquillement. Pas pour longtemps...

www.ayoub-et-les-maths.com
ayoub.hajlaoui.scolaire@gmail.com

Un dragon apparaît dans ses rêves, sous la forme de la suite (w_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $w_n = \sum_{k=0}^{n} r^k \cos(k\theta)$, avec θ un réel quelconque et $r \in [0; 1[$.

N'écoutant que son courage, le nounours va montrer à ce dragon à quel point il est limité.
Exprimer, en fonction de θ et r, la limite de la suite (w_n).

Indication (ou épée de notre nounours) : le résultat que nous connaissons sur les sommes de suites géométriques s'applique aussi aux suites géométriques complexes

Correction :

I *Retrouvailles à l'infini*

La difficulté de cette partie, c'est de réussir à traduire mathématiquement l'énoncé, d'une manière qui nous permettra de dérouler nos calculs. L'indication nous parle de suite géométrique. Laquelle pouvons-nous voir ? On voit bien que la longueur des pas est divisée par 2 à chaque fois...

Posons $(u_n)_{n\geq 1}$ la suite définie pour tout $n \geq 1$ par : "u_n est la longueur du n-ième pas de la fille". (u_n) est alors une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $u_1 = \frac{1}{2}$.

Ne perdons pas de vue ce que demande l'énoncé. Il va falloir introduire une autre suite modélisant la distance restante entre la fille et le nounours après chaque pas.

Posons $(d_n)_{n\geq 1}$ la suite définie pour tout $n \geq 1$ par : "d_n est la distance fille/nounours après le n-ième pas de la fille".

On a alors la relation suivante : $\forall n \geq 1, d_n = 1 - (u_1 + u_2 + ... + u_n)$

Autrement dit, $d_n = 1 - \sum_{k=1}^{n} u_k$.

Et là, ça doit faire tilt.. Vous savez calculer la somme de termes consécutifs d'une suite géométrique.

$\forall n \geq 1,\ \sum_{k=1}^{n} u_k = u_1 \times \dfrac{1-(\frac{1}{2})^n}{1-\frac{1}{2}}$ $\quad$ (*premier terme* $\times \dfrac{1 - raison^{\text{nombre de termes}}}{1 - raison}$)

$\forall n \geq 1,\ \sum_{k=1}^{n} u_k = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1-(\frac{1}{2})^n}{\frac{1}{2}} = 1 - (\dfrac{1}{2})^n$

Donc : $\forall n \geq 1,\ d_n = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1-(\frac{1}{2})^n}{\frac{1}{2}} = 1 - \left(1 - (\dfrac{1}{2})^n\right)$

Donc $d_n = (\dfrac{1}{2})^n$. Or, $-1 < \dfrac{1}{2} < 1$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} d_n = 0$

$\boxed{\text{La distance entre la fille et le nounours tend bien vers 0}}$.

II *Quand l'infiniment petit donne l'infiniment grand*

1) Soit $k \geq 2$. La fonction $t \to \dfrac{1}{t}$ est strictement décroissante sur $]0; +\infty[$, donc a fortiori sur $[k; k+1]$.

Donc pour tout $t \in [k; k+1]$, $\dfrac{1}{t} \leq \dfrac{1}{k}$

Si vous avez eu cette intuition, le plus dur est fait. Il ne reste plus qu'à passer à l'intégrale, ce que le cours nous permet.

Donc $\int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{k} dt$

Remarquez bien que dans l'intégrale de droite, $\frac{1}{k}$ est une constante (puisqu'on intègre par rapport à la variable t, et que k ne dépend pas de t). Rappelez-vous ce qui ce passe quand on intègre une constante de a à b...

Donc $\int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt \leq (k+1-k) \times \dfrac{1}{k}$. $\quad$ Donc : $\boxed{\forall k \geq 2,\ \int_k^{k+1} \dfrac{1}{t} dt \leq \dfrac{1}{k}}$

2) *La difficulté de cette question, c'est de voir le lien avec la première. De penser à sommer les intégrales...*

$\forall n \geq 1, \int_2^{n+1} \frac{1}{t}dt = \int_2^3 \frac{1}{t}dt + \int_3^4 \frac{1}{t}dt + \int_4^5 \frac{1}{t}dt + ... + \int_n^{n+1} \frac{1}{t}dt$ (Chasles)

Or, d'après 1), $\int_2^3 \frac{1}{t}dt \leq \frac{1}{2}$, $\int_3^4 \frac{1}{t}dt \leq \frac{1}{3}, ..., \int_n^{n+1} \frac{1}{t}dt \leq \frac{1}{n}$

Donc $\forall n \geq 1, \int_2^{n+1} \frac{1}{t}dt \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n}$

On rajoute 1 *de chaque côté pour tomber sur ce que demande l'énoncé.*

Donc $\forall n \geq 1,\ 1 + \int_2^{n+1} \frac{1}{t}dt \leq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n}$

c-à-d : $\boxed{\forall n \geq 1,\ 1 + \int_2^{n+1} \frac{1}{t}dt \leq u_n}$

3) *On nous demande de déduire, de la question 2, la limite de la suite (u_n). Vu l'inégalité, vous devez d'ores et déjà deviner qu'on va devoir utiliser un théorème de comparaison pour trouver que cette limite est $+\infty$...*

$\forall n \geq 1,\ 1 + \int_2^{n+1} \frac{1}{t}dt = 1 + [\ln(t)]_2^{n+1} = 1 + \ln(n+1) - \ln(2) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$

Donc d'après 2), et par théorème de comparaison, $\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty}$

Le nounours peut alors répondre la chose suivante à la petite fille : dans la définition de la suite (u_n), on rajoute à chaque fois un terme de plus en plus petit tendant vers 0 ($u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n}$), et pourtant, la suite (u_n) diverge vers $+\infty$.

III *Quand l'infiniment petit ne donne pas l'infiniment grand*

1) Soit $k \geq 2$. La fonction $t \to \dfrac{1}{t^2}$ est strictement décroissante sur $]0;+\infty[$, donc a fortiori sur $[k-1;k]$.

Donc pour tout $t \in [k-1;k]$, $\dfrac{1}{t^2} \geq \dfrac{1}{k^2}$. Donc $\int_{k-1}^k \frac{1}{t^2}dt \geq \int_{k-1}^k \frac{1}{k^2}dt$

Remarquez bien que dans l'intégrale de droite, $\frac{1}{k^2}$ est une constante (puisqu'on intègre par rapport à la variable t, et que k ne dépend pas de t).

Donc $\int_{k-1}^k \frac{1}{t^2}dt \geq (k-(k-1)) \times \frac{1}{k^2}$. Donc : $\boxed{\forall k \geq 2,\ \int_{k-1}^k \frac{1}{t^2}dt \geq \dfrac{1}{k^2}}$

2) $\forall n \geq 1, \int_2^n \frac{1}{t^2}dt = \int_2^3 \frac{1}{t^2}dt + \int_3^4 \frac{1}{t^2}dt + \int_4^5 \frac{1}{t^2}dt + ... + \int_{n-1}^n \frac{1}{t^2}dt$ (Chasles)

Or, d'après 1), $\int_2^3 \frac{1}{t^2}dt \geq \frac{1}{3^2}$, $\int_3^4 \frac{1}{t^2}dt \geq \frac{1}{4^2}, ..., \int_{n-1}^n \frac{1}{t^2}dt \geq \frac{1}{n^2}$

Donc $\forall n \geq 1, \int_2^n \frac{1}{t^2}dt \geq \frac{1}{3^2} + ... + \frac{1}{n^2}$

On rajoute $1 + \frac{1}{2^2}$ *de chaque côté pour tomber sur ce que demande l'énoncé.*

Donc $\forall n \geq 1,\ 1 + \frac{1}{2^2} + \int_2^{n+1} \frac{1}{t^2}dt \geq 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + ... + \frac{1}{n^2}$

c-à-d : $\underline{\forall n \geq 1,\ 1 + \frac{1}{4} + \int_2^n \frac{1}{t^2}dt \geq v_n}$

3) $\forall n \geq 1,\ 1 + \frac{1}{4} + \int_2^n \frac{1}{t^2}dt = 1 + [-\frac{1}{t}]_2^n = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{n} \leq 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}$

Donc (d'après 2) $v_n \leq 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}$

La suite v_n est donc majorée. De plus, elle est croissante (voir $v_{n+1} - v_n$ ou constater simplement qu'on rajoute à chaque fois un terme positif dans la définition de v_n). Donc $\boxed{(v_n) \text{ converge.}}$

IV *Dragon complexe*

Dans l'indication, on parle de suite géométrique... Comment y arriver avec ce cosinus qui nous dérange ? Notez que sans lui, ça aurait été parfait avec la somme des r^k. Essayons de nous ramener à des puissances...

Par définition, $\forall \alpha \in \mathbb{R}, e^{i\alpha} = \cos(\alpha) + i\sin(\alpha)$

Donc $\cos(\alpha) = \mathfrak{Re}(e^{i\alpha})$ où $\mathfrak{Re}$ est la partie réelle.

Dans notre cas, pour tout entier naturel k, on a donc : $\cos(k\theta) = \mathfrak{Re}(e^{ik\theta})$

De même, $r^k \cos(k\theta) = \mathfrak{Re}(r^k e^{ik\theta})$ (r^k étant réel)

Donc pour tout entier naturel n, $w_n = \sum_{k=0}^{n} r^k \cos(k\theta) = \sum_{k=0}^{n} \mathfrak{Re}(r^k e^{ik\theta})$

N'oubliez pas que $\mathfrak{Re}$ est linéaire, c-à-d :

$\mathfrak{Re}(z_1 + z_2 + ... + z_N) = \mathfrak{Re}(z_1) + \mathfrak{Re}(z_2) + ... + \mathfrak{Re}(z_N)$

(la somme des parties réelles est égale à la partie réelle de la somme...)

Donc $w_n = \mathfrak{Re}\big(\sum_{k=0}^{n} r^k e^{ik\theta}\big)$

Génial ! Mais pourquoi ? Parce qu'on voit se dessiner, dans la somme, le terme général d'une suite géométrique de raison $re^{i\theta}$...

Pour tout entier naturel n,

$$w_n = \mathfrak{Re}\Big(\sum_{k=0}^{n} (re^{i\theta})^k \Big) = \mathfrak{Re}\Big(1 \times \frac{1-(re^{i\theta})^{n+1}}{1-re^{i\theta}}\Big) = \mathfrak{Re}\Big(\frac{1-(re^{i\theta})^{n+1}}{1-re^{i\theta}}\Big) \quad (*)$$

On ne nous demande pas de calculer w_n pour tout n, mais juste la limite de la suite (w_n).

Qu'arrive-t-il à $(re^{i\theta})^{n+1}$ lorsque n tend vers $+\infty$? $(re^{i\theta})^{n+1} = r^{n+1}(e^{i\theta})^{n+1}$.

Peut-être qu'en regardant le module...

$|(re^{i\theta})^{n+1}| = |r|^{n+1}|(e^{i\theta})|^{n+1} = |r|^n$ (car $|e^{i\alpha}| = 1$ pour tout réel α)

Or, $|r| = r$ (car $r \geq 0$), et $r \in [0; 1[$, donc $|r|^n = r^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

On a donc le module de $(re^{i\theta})^{n+1}$ qui tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$...

Donc, tout simplement : $(re^{i\theta})^{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

Donc en faisant tendre n vers $+\infty$ dans l'équation $(*)$, (et en utilisant la continuité de $\mathfrak{Re}$ mais ce niveau de précision n'est pas demandé en Terminale), on a :

$$\begin{aligned}
w_n &\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathfrak{Re}\Big(\frac{1}{1-re^{i\theta}}\Big) \\
\text{Or, } \mathfrak{Re}\Big(\frac{1}{1-re^{i\theta}}\Big) &= \mathfrak{Re}\Big(\frac{1}{1-r\cos(\theta)-i\sin(\theta)}\Big) \\
&= \mathfrak{Re}\Big(\frac{1-r\cos(\theta)+i\sin(\theta)}{(1-r\cos(\theta))^2+(\sin(\theta))^2}\Big) \quad \text{(conjugué...)} \\
&= \mathfrak{Re}\Big(\frac{1-r\cos(\theta)}{(1-r\cos(\theta))^2+(\sin(\theta))^2} + i\frac{\sin(\theta)}{(1-r\cos(\theta))^2+(\sin(\theta))^2}\Big) \\
&= \frac{1-r\cos(\theta)}{(1-r\cos(\theta))^2+(\sin(\theta))^2}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Donc } w_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1-r\cos(\theta)}{(1-r\cos(\theta))^2+(\sin(\theta))^2}}$$