Limite d'une suite géométrique

Ayoub Hajlaoui

Parole d'écrivain, ce n'est qu'un cas d'école :
Si tu excèdes 1, tes puissances décollent.

Il est conseillé d'avoir travaillé l'exercice Introduction au raisonnement par récurrence, et d'avoir lu sa correction avant de s'intéresser à l'exercice suivant.

Énoncé : (temps conseillé : 30 min)

1) Soit un réel $a > 0$. Par récurrence, montrer que pour tout entier naturel n, on a l'inégalité suivante : $(1+a)^n \geq 1+na$
2) En déduire une propriété du cours sur les limites de suites géométriques.

Correction :

1) *Les énoncés gentils comme ça, qui nous donnent la marche à suivre, on en raffole. Je vous avoue avoir hésité à retirer l'indication " par récurrence "...*
Montrons par récurrence que **pour tout** entier naturel n, la propriété P_n : "$(1+a)^n \geq 1+na$" est vraie :

Initialisation : $(1+a)^0 = 1$ et $1+0\times a = 1$. Donc $(1+a)^0 \geq 1+0\times a$, c'est-à-dire que $\boxed{P_0 \text{ est vraie}}$.
Rappelons que tout nombre élevé à la puissance 0 *donne* 1. *Remarquons aussi qu'on a bien* $1 \geq 1$, *puisque le cas d'égalité est compris dans la relation* $\geq$

Hérédité : Si **pour un certain** n, P_n est vraie, c'est-à-dire si $(1+a)^n \geq 1+na$, on a alors :
$(1+a)^{n+1} = (1+a)^n \times (1+a)$ *D'où me vient l'idée d'exprimer* $(1+a)^{n+1}$ *en fonction de* $(1+a)^n$ *?*
Du fait que je dois utiliser P_n *pour arriver à montrer* P_{n+1}...
Comme $(1+a)^n \geq 1+na$, on aboutit à :
$(1+a)^n \times (1+a) \geq (1+na)(1+a)$ Le sens de l'inégalité ne change pas car on a multiplié les deux membres par $1+a$, qui est positif.
Arrivé ici, que faire au membre de droite ? Je ne vois pas grand-chose, à part développer...
Donc $(1+a)^{n+1} \geq 1+a+na+na^2$
Mais je veux arriver à P_{n+1}, *c'est-à-dire à* $(1+a)^{n+1} \geq 1+(n+1)a$...
Donc $(1+a)^{n+1} \geq 1+(n+1)a+na^2$
Or, $1+(n+1)a+na^2 \geq 1+(n+1)a$.
Ben oui, le membre de gauche, c'est le membre de droite auquel on a ajouté le terme positif na^2...
Donc $(1+a)^{n+1} \geq 1+(n+1)a$. Donc P_{n+1} est vraie.
On a donc montré l'hérédité, c'est-à-dire : $\boxed{P_n \Longrightarrow P_{n+1}}$

Conclusion : le principe de raisonnement par récurrence nous permet de conclure ce qui suit :
$\boxed{\text{Pour tout entier naturel } n \text{, la propriété } P_n : \text{" } (1+a)^n \geq 1+na \text{ " est vraie.}}$

www.ayoub-et-les-maths.com
ayoub.hajlaoui.scolaire@gmail.com

2) *J'ai bien conscience du fait que la plupart d'entre vous n'ont pas vu de définition formelle de limite en Première. Pourtant, vous avez dû les manipuler à l'occasion, dans le cadre des suites géométriques... Je vais donc essayer de vous faire comprendre, de manière intuitive, comment on peut arriver à un résultat du cours de Première sur les limites de suites géométriques.*

Qui serait la suite géométrique ici ? Celle de terme général $(1+a)^n$ *bien sûr, ou encore* q^n *en posant* $q = 1 + a$ *(raison de cette suite). Que dire de* q *dans ce cas ?*

Posons $q = 1 + a$. On a alors $q > 1$ (puisque $a > 0$)
Nous venons de démontrer que pour tout entier naturel n, $q^n = (1 + a)^n \geq 1 + na$.

Or, $\lim\limits_{n \to +\infty} na = +\infty$

Quand n *tend vers* $+\infty$ *("devient aussi grand qu'on veut"), il est normal que* na *aussi tende vers* $+\infty$*, vu que* $a > 0$*. En multipliant un nombre " aussi grand qu'on veut " par un nombre strictement positif fixé, on obtient toujours un nombre " aussi grand qu'on veut ".*
Si on avait $a < 0$*,* na *tendrait vers* $-\infty$*. Et si* a *était égal à* 0*, se prononcer sur la limite de* na *aurait été plus compliqué...*

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 1 + na = +\infty$
En rajoutant 1 *à un nombre " aussi grand qu'on veut ", on obtient toujours un nombre " aussi grand qu'on veut ".*

Or, $q^n \geq 1 + na$.

Que dire de q^n *s'il est plus grand ou égal à une quantité qui tend vers* $+\infty$ *?*

Donc par théorème de comparaison, $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty$
Ce théorème de Terminale peut aussi être appelé " théorème du gendarme à l'infini ". Imaginez un gendarme (ici $1 + na$*) qui court loin, très loin vers* $+\infty$*, et imaginez maintenant un voleur (ici* q^n*) encore plus loin devant lui... Et bien ce voleur tend nécessairement vers* $+\infty$*.*

Ce résultat est valable pour tout $q > 1$, puisqu'il suffit alors de poser $q = 1 + a$ avec $a > 0$.

On retrouve donc le résultat suivant : $\boxed{\text{si } q > 1,\ \lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty}$

www.ayoub-et-les-maths.com
ayoub.hajlaoui.scolaire@gmail.com